生活与科学文库

从数的诞生到复数

i^2

虚数 i 的奥秘

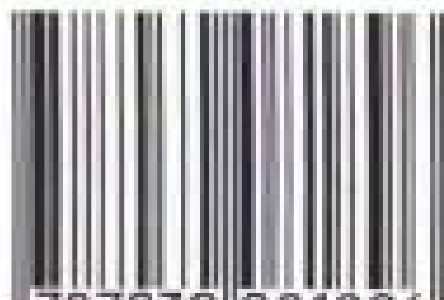
生活与科学

文库

〔日〕 堀場芳數 著

科学出版社

虚数i的奥秘



2000年5月第一版　　开本：787×960 1/32
2000年5月第一次印刷　　印张：7 1/8
印数：1—8 000　　字数：144 000

ISBN 7-03-008189-7/O · 1190

定　价：10.00元

生活与科学文库

虚数i的奥秘

——从数的诞生到复数

〔日〕 堀場芳数 著
丁 树 深 译

科 学 出 版 社

「虚数 i の不思議」 堀場芳数

First published in Japan in(1990)by Kodansha Ltd. Tokyo
Chinese version published by Science Press
Chinese Academy of Sciences
Under license from Kodansha Ltd.
本书据日本讲谈社 1997 年第 14 次印刷版译

图字:01－1999－3294 号

图书在版编目(C I P)数据

虚数 i 的奥秘——从数的诞生到复数/〔日〕堀場芳数著;丁树深译 .-北京:科学出版社,2000
(生活与科学文库)
ISBN 7-03-008189-7
Ⅰ. 虚… Ⅱ.①堀… ②丁… Ⅲ. 复数-普及读物
Ⅳ. O1-49
中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 73904 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
北京双青印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
定价:10.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

前　言

当前，一听到数学就头痛的仍大有人在。

本书是特意写给这些人的一本趣味数学。

数学为什么被有些人视如蛇蝎、望而生畏呢?

数字还可以，一旦遇到数学式，有些人就头昏脑胀、不知所措。你有过这样的体验吗?

本书作者竭尽全力，尽量通俗易懂地讲解数学式。请大家阅读2~3页试试看。

在学校学习时，对一些似懂非懂、莫明其妙的数学式，有的同学自作聪明，好像完全明白了，甚至还说:“啊!是的。”其实，滥竽充数、不求甚解而误事的例子是不胜枚举的。

当然，和文字叙述一样，数学式也应仔细阅读。为此，奉劝大家务必通读数学

式，清楚弄懂其中的来龙去脉。

在电车里或等待恋人的时候，最好抽时间一点一点地阅读。不管怎么说，挤时间看书是对阅读能力的一种训练。

当你在众目睽睽下看这本书时，周围的人们会敬佩地猜想："毫不费力地阅读这么困难的书的人，大概是位了不起的人物吧！"

如果还没有意中人，阅读此书会使你萌生爱情而坠入情网。

如果以此书中部分内容为话题，穿插在幽会时的谈情说爱中，对方也许会认为你是一位文质彬彬的秀才呢。

德国数学家高斯曾以"数学王子"和现今磁卡时代奠基人而闻名于世，他说过："数学进展与国家的繁荣昌盛息息相关。"由此可见，发展数学对社会的影响十分深远。

大家不要错过浏览世界奇绩的挑战。

最近，在日本，大人和孩子们都热衷于看漫画，越来越多的人不再看数学书了。这实在是件令人遗憾的事情。

也不能说漫画就不好。作者本人一直认为漫画真是好极了。实际上，为取得美国汽车驾驶执照的教科书就是采用通俗易懂的漫画形式编写的。

20年前，日本庆应大学教授、数学家田岛一郎先生曾对作者说过："如果教

科书能用漫画编写，孩子们一定会更努力地用功学习。”

数学是科学技术的基础。尽管数学非常重要，但有人却常以“难学”或“难懂”为借口，对数学敬而远之。

这是否因为人们不习惯的数学术语太多或者因为数学是一个一个逻辑思维堆砌的学问呢？

但是，反过来也可以认为，数学就像上楼登楼梯，必须要一阶一阶地攀登，这样就不难理解数学不是高不可攀的。

例如，从一层登上二层楼，从二层再登上三层楼……这样逐层攀登得越高，周围景物就见得越广，如果在超高层建筑的展望台登高瞭望，还能看到远处的风景，甚至360°全景风貌犹如拨云见日，也可尽收眼底。

同样，也可以认为数学是循序渐进、严谨扎实的科学。从这一点来看，数学也许是最完美的学问之一。

对加法演算感到难以应付的小学生，升入高中学习数列之后，就能立刻简单地算出1到100的自然数之和，即正整数之和为5050。

还有，关于椭圆面积以及酒樽状曲面面积的计算，利用积分公式在几分钟甚至数十秒钟以内就可迅速得出答案。

值得一提的是，有些不以数学为职业

的人们，也总想掌握点儿高中数学知识。

本书是为高中生和不能自如运用高中数学的读者而写，书中内容解说谨慎详细、通俗易懂。在现实社会中，需要数学判断的事情之多是很难意料的。

实际上，日常生活丰富多彩，一旦遇到集合、误差、概率、统计等各式各样的数学问题，也许你自己会不知不觉地在实践中运用这些数学知识。

当今社会虽然不是万能的时代，但在已进入信息和高科技的今天，偶尔翻开数学书想想怎样继续提高现代数学基础也是很有意义的。

还有，回想中学时学过的数学，置身于抽象世界，这对促进头脑反应或提高数学判断能力不是很有益处的吗？

为此，本书首先从数的诞生开始，再讲到虚数、复数，尤其以奇妙的复数为核心，穿插不同时期与 i 相关数学家的生平事绩，汇总写成这本趣味数学读物。

如果原来你厌弃数学，本书定会使你喜欢上数学。

最后，将虚数固有的一些标奇立异的性质作为虚数的七个奥秘归纳如下。

(1) $i^2=-1$，即出现了平方为负的 i；

(2) 虚数是没有大小关系的数；

(3) 共轭复数之和及其乘积均为实数；

(4) i^n 值只有4个，并可反复变换为1，-1，i，$-i$；

(5) i 可视为复数平面上的1个点；

(6) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$，即三角函数值的 n 次方幂可转化为相应幅角的 n 倍；

(7) $e^{\pi i} = -1$，e，π，i 之间是三角恋（-1）关系。也就是说，无理数的｛（无理数）×（虚数）｝次方幂为实数。

堀場芳数

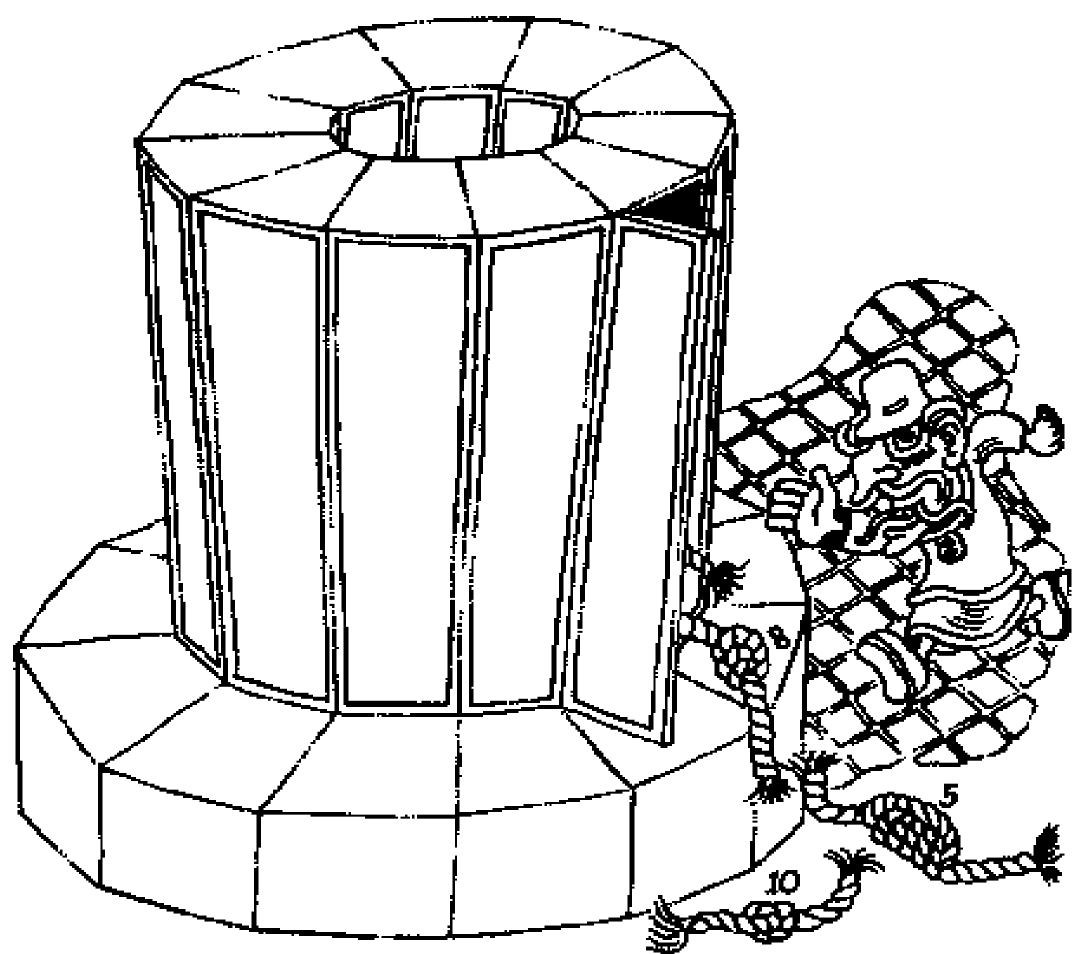
1990年初夏

目 录

第1章

追踪数的诞生过程

——　从"一一对应"到电脑　——



§1.1 怎样"一一对应"

这里不讨论达尔文进化论,但近半个世纪以来,人们感到刚出生的婴儿变化很大。笔者小时候那个年代,婴儿降生后,手指总是弯曲着,并把小拳头握得紧紧的。这样手掌易染湿疹,为此必须掰开婴儿拳头,在掌心放些脱脂棉才行。

可是,最近几年却不同,初生婴儿往往都张开小手,并可看清婴儿红叶般的5个小指头。

还有,近些年来幼儿语言也多起来了,教小孩数数也简单省事了,但在半个世纪之前,给小孩糖果之类的东西时就说:"给你1个",若给孩子2、3块糖就说:"给你多多啦"等稚气十足的话。

总而言之,幼儿领会1个和很多个的区别要慢些。

翻开数学史书可以发现,很多土著人只能区分1个和很多个。有关这方面的趣事,还留有各种传说。

为了交换宝石和子弹,有位白人问道:"10颗子弹换10块宝石,想换吗?"对方的土著居民脸色一变说:"不,不行!",但若一个一个地交换,换多少次都行。

不知道数和数字的人们,在交换物品时只知道1颗子弹换一块宝石,即"一一对应"地交换。

稍微抽象化一点,不管什么物品都行,就有$\{A,B,C,\cdots\}$和$\{a,b,c,\cdots\}$两组集合。

这里,$\{\ \}$是集合符号。

如图1-1所示,当Aa,Bb,$Cc\cdots$那样一个A对应一个a,一个B对应一个b,一个C对应一个c时,这种关系则称之为"一一对应"。

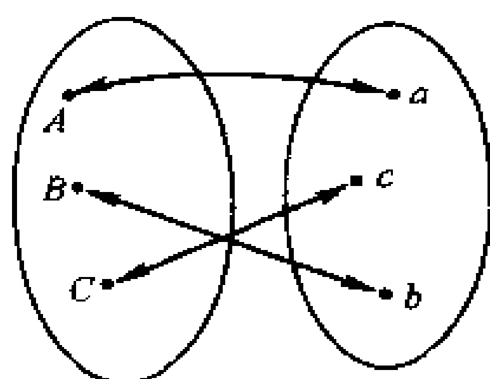


图1-1 “一一对应”示意图

例如，世界上每个国家都有一面自己的国旗，因此，一面国旗就对应一个国家。

这样一来，不仅仅是子弹和宝石，人们使用的各种物件都有各自“一一对应”的种种关系。

还有，土著居民的酋长，每天早上让人们去田里干活，并让每人放一块拳头大的石头再走。傍晚由地里干活回来的人拿一块石头换一份食物，石头全部拿光了，就确认当天早上出工的人全都回来了。

与此相同的故事还有，饲养很多羊的土著居民，清晨外出放牧羊群时，放出多少只羊出圈，就在大树干上刻划多少个记号。傍晚，羊群归圈时，再谨慎地按照早晨刻在树干上的记号用手指逐一地对照检查。若树干上的记号与羊的数目相同，说明归栏羊数与出栏羊数相同。

这确实是“一一对应”的。

这样的故事，也有的作为寓言在世界各地广泛流传。

§1.2 绳扣记数

众所周知，在没有货币之前，一切物品都是交换

的。也就是说，从制作物品或占有物品的人手中，通过交换再过渡到使用或食用人手里，并依靠交换取得赖以生存而自己却没有的东西。

远古时代，在南美印加帝国出现了用绳扣表示数的绳扣记数方法。

如图 1－2 中所示，不同的绳扣节代表不同的数目。1 个绳扣节代表“1”，2 个绳扣节代表“2”……古时候印加人采用的就是这种表示数目的方法。

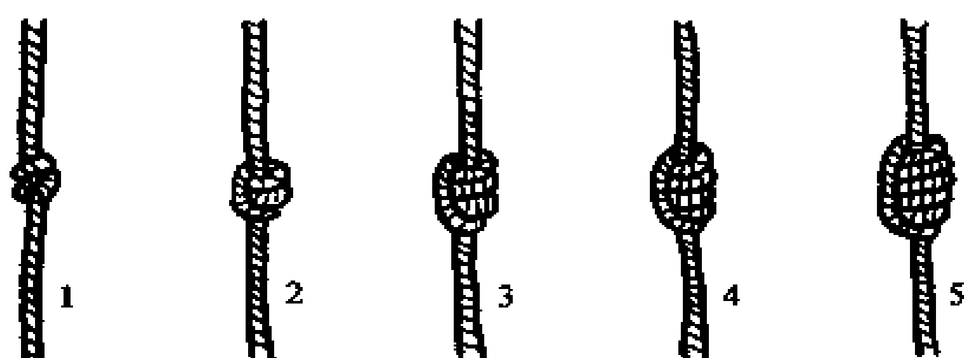


图 1－2　绳扣记数示意图

绳扣不仅仅是可数数的计数方法，并且也能起到记录数的作用。

在印加帝国，绳扣有数字的作用。也就是说，绳扣是数词以外的代用数字。

实际上，除了绳扣记数外，也使用手指、圆木等表示数目。

据说，也有使用动物和植物记数的。例如，美洲虎的头表示“1”，展开翅膀的鹫表示“2”，紫苜蓿的叶子表示“3”，家畜代表“4”等表示方法。

热带新几内亚部落的人，规定左手小手指代表“1”，无名指代表“2”，中指代表“3”……同时，用右手指向左手手指的相应部位，则可准确无疑地知道该数。

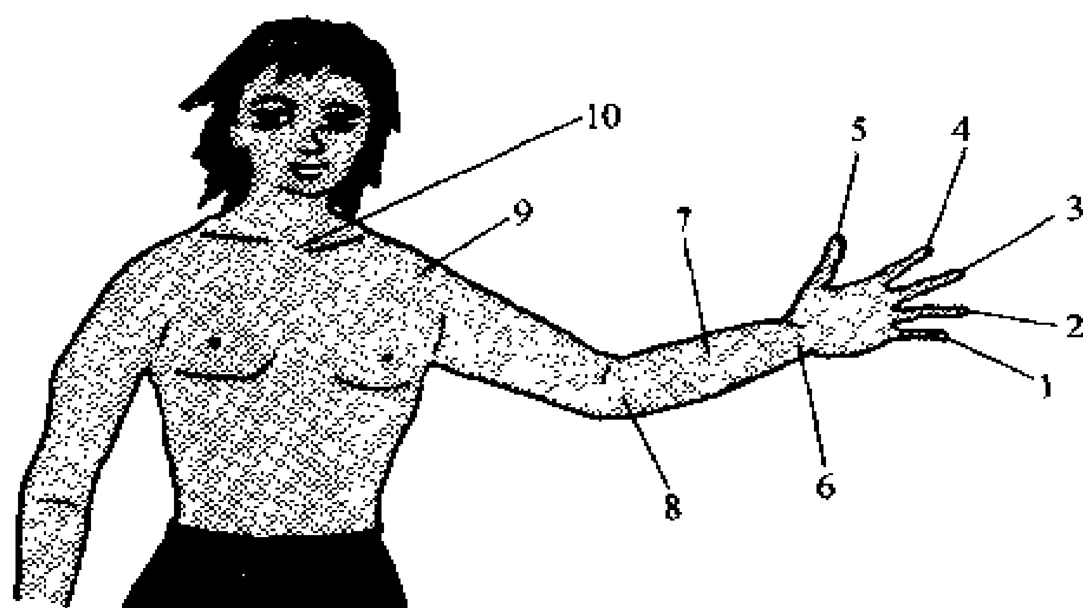


图 1-3　手指等记数示意图

§1.3　零(0)和印度·阿拉伯数字的发明

计算时所使用的数字1,2,3,…被称为阿拉伯数字。其实,这并不是阿拉伯人发明的,实际上是印度最早发明,后经阿拉伯人传播到欧洲。

为了缅怀印度数学家对数字创业的艰辛功绩,算用数字现在被称为印度·阿拉伯数字。

很遗憾,由中国传入日本的汉字中没有日本人自己的数字。但是,数数从远古时代起就是日常生活中必不可少的事。

日本有固有数词的计数方法(从略)和记录数的记数法。目前日本仍在使用表示1,2,3,…和一,二,三,……计数的方法,称为记数法。

绳扣记数是古代印加帝国的记数方法,而目前在

日本多亏有了中国数字(一,二,三,四,五,六,七,八,九,十)和算用数字,即印度·阿拉伯数字,简称阿拉伯数字(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),从而使书写数字和数数,甚至在幼稚园都已是简单可行的。

最近,由于电脑,即电子计算机的迅速发展,我想大家对2进制和2进位数之类术语都经常有耳闻吧。

进位制(n进制)是什么?让我们稍微说一下。

古代人数数是件苦差使。一只手有5个手指,因此,最早开始用5个手指头数数是5进制。

食指当作"1",食指和中指当作"2",但类人猿进化之初,手指能否一个一个地灵活弯曲还是个问题。

但是,可以认为,手指和脚指同样都能够抓住东西。这就像动物园中的猴子等动物一样,手和脚都能灵活地揪住树枝。

由此可以想像,研究动物行为和进化论的专家或许也不知道伸出中指为1或弯曲1个指头为1,还是用右手朝向左手的1个手指头为1。

但是,用一只手的5个指头是否就认为不是表示由1到5里面1,2,3,4,5的数呢?

§1.4 数起源于5进位的数

居住在中美洲的玛雅部落,大约在450年前就已衰败灭亡了。但是,玛雅部落所使用的数字却一直沿用至今,如图1-4所示。

一看便知这些数字是5进制,所以玛雅数字是5进位的。据说,●代表女性,▬代表男性。

可是,也有人说,在玛雅部落中以20为单位,使用

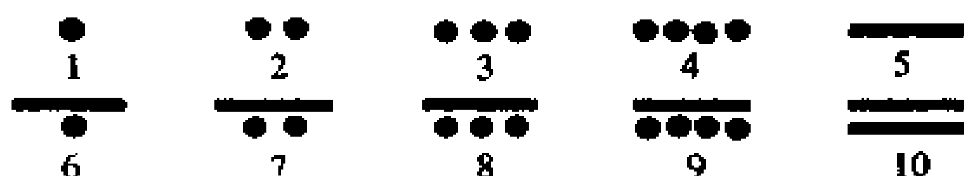


图 1－4 玛雅数字

20 进位的数字，但这个问题目前一直未搞清楚。

还有，古希腊用希腊字母表示数。也就是说，α 表示 1，β 表示 2，γ 表示 3，δ 表示 4……

尔后，又有 5 进制和 10 进制，图 1－5 给出的是 5 进位希腊数字。

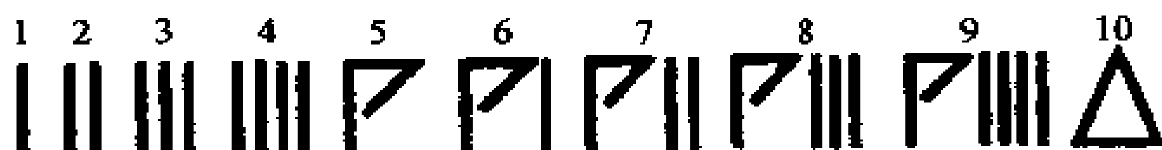


图 1－5 希腊数字

此外，罗马数字是既有 5 进制又有 10 进制的数字，如图 1－6 所示。

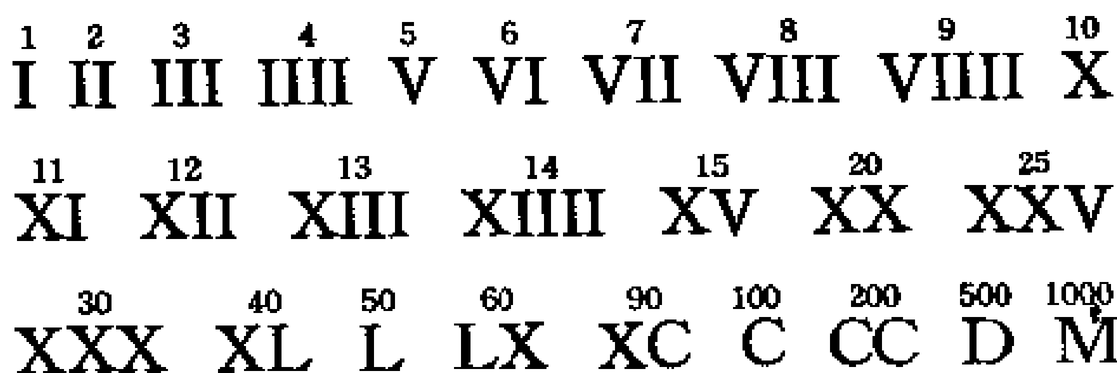


图 1－6 罗马数字

罗马数字IIII 也写作IV，而VIIII 也写作IX。在钟表表盘上，这些罗马数字至今一直沿用着。1990 年的罗

马数字写为 MCMXC 年。

自古以来，日本人就用称为算筹的矩形长木片表示数，如图 1－7 所示。

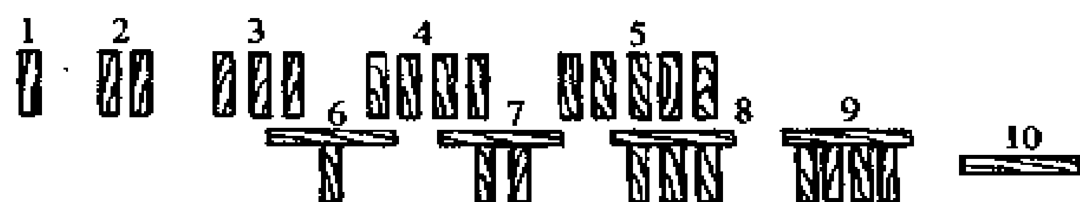


图 1－7　日本古时候的算筹示数

另外，与我们使用的阿拉伯数字一样，巴比仑楔形数字也是 10 进位数字，如图 1－8 所示。



图 1－8　巴比仑楔形数字

图 1－8 中数字是将摊成平板状的黏黄土，用棱角状木棒雕刻成 V 字形。

此外，埃及数字也是 10 进位数字，从中国引进的麻将牌上，至今依然沿用古埃及数字，如图 1－9 所示。

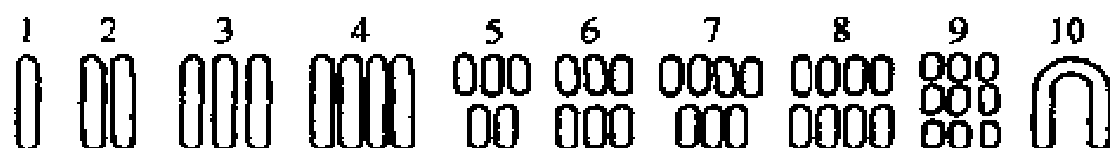


图 1－9　古埃及数字

日本现在所使用的中国汉字中的数字，当然也是 10 进制的，如图 1－10 所示。

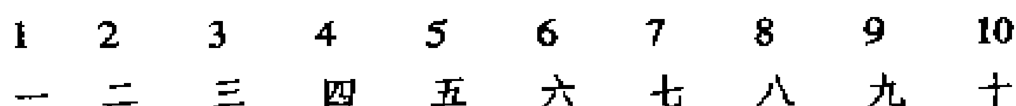


图 1－10　中国数字

§1.5 为什么使用12进制和60进制

除10进制和5进制以外,日常生活中也还使用12进位数和60进制数。

12进制数,即自古以来所使用的12进位数。12里面含有1,2,3,4,6,12共6个约数,而且分配物品时,约数越多分配越方便。实际上,这与公元前以来$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,…这种分数概念发展是很有关系的。

分数早在公元前就有了,面小数是在有了阿拉伯数字之后不久才发现的比较新的数。所以小数是10进制数,即10进位数。

事实上,小数概念是1585年荷兰一位叫西蒙·斯梯文(1548年左右~1620年左右)在他的著作中最先发表的。也就是说,小数的发现距今大约只有400年。

继小数之后,印度最先采用了大的数($\geqslant 1$的数)和小的数($\leqslant 1$的数),其单位的印度命名列于表1-1。表中数字当然为10进位数。

表1-1中,$10^2=100$,$10^3=1000$,$10^4=10000$,…,而10肩上的小写数字称之为指数,最初只表示自乘次数。

可是,后来对指数的约束改变了。指数不仅仅表示自乘的正整数次数,它也可为小数、分数、负数等等。

这一点简单说明如下。对负的指数而言,

$$10^{-1}=\frac{1}{10^1}=\frac{1}{10}=0.1$$

表 1-1 单位的印度命名

大的(≥1)数		小的(≤1)数	
中文名称	数值	中文名称	数值
一	1	一	1
十	10	分	$10^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$
百	10^2	厘	$10^{-2}\left(\frac{1}{10^2}\right)$
千	10^3	毫	10^{-3}
万	10^4	丝	10^{-4}
亿	10^4	忽	10^{-5}
兆	10^{12}	微	10^{-6}
京	10^{16}	纤	10^{-7}
垓	10^{20}	沙	10^{-8}
秭	10^{24}	尘	10^{-9}
穰	10^{20}	埃	10^{-10}
沟	10^{32}	渺	10^{-11}
涧	10^{24}	漠	10^{-12}
正	10^{32}	模糊	10^{-13}
载	10^{44}	逡巡	10^{-14}
极	10^{48}	须臾	10^{-15}
恒河沙	10^{48}	瞬息	10^{-16}
阿僧祇	10^{32}	弹指	10^{-17}
那由他	10^{20}	刹那	10^{-18}
不可思议	10^{24}	六德	10^{-19}
无量大数	10^{68}	虚	10^{-20}
		空	10^{-21}
		清	10^{-22}
		净	10^{-23}

从而 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

下面再来看看,指数为分数和小数的情况。

$$10^{\frac{1}{2}} = 10^{0.5} = \sqrt{10},$$

从而 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，所以 $10^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}$

以上所列举的情况只限于 $a>0$，即 a 为正的整数时，$\sqrt{a}$，$\sqrt[4]{a}$这样的偶次方根为 $a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{1}{4}}$；而$\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[5]{a}$这样的奇次方根为 $a^{\frac{1}{3}}$，$a^{\frac{1}{5}}$，并且它们全都可使用分数指数表示。

那么，$10^{\frac{2}{3}}$和 $10^{\frac{3}{2}}$是什么样的数呢？这些数通常可写作 $a^{\frac{n}{m}}=(\sqrt[m]{a})^{n}=\sqrt[m]{a^{n}}$，而且可表示为

$10^{\frac{3}{2}}=10^{1+\frac{1}{2}}=10\times\sqrt{10}=10\sqrt{10}$，以及

$10^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{10})^{2}=\sqrt[3]{10^{1}}=\sqrt[3]{100}$。

更进一步，使用 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$，

则 $10^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{10^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

这里将$\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$的分子和分母同时乘以$\sqrt{10}$后，

则$\dfrac{1}{10\sqrt{10}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10\cdot10}=\dfrac{\sqrt{10}}{100}$

这样，将无理数分母换算为有理数的计算，称为分母有理化。

现在介绍目前仍广泛使用着的 12 进位数。

现如今，铅笔等仍按“打”计算，一打 12 支，一罗有 12 打，共 144 支。

英国码磅度量衡制也是 12 进制。但是，最近英国长度单位也采用 10 进制——米制。

可是，20 进制是怎样产生的至今还不清楚，也许是手指和脚指共有 20 个，所以自然而然地产生了 20

进制。

如前所述，在人类尚未进化的原始时代，脚指和手指同样都能抓牢东西，但却不能像现代人那样灵巧地任意弯曲手指。

随着人类的进化，很快就有人能使用全部10个手指，手指可以代替脚指，而由11至20不是相当于两次使用手指吗?!

英语中，数字1至13的命名截然不同，数字13至19的命名后缀“teen”都一样，即thirteen(13)，fourteen(14)，fifteen(15)，sixteen(16)，seventeen(17)，eighteen(18)，nineteen(19)，可是数字20，21，…30，31，…90，91，…的命名是10进制，也就是说，20以上英文数字命名是逢十变换的。

这样看来，在英语中数字20以下和21以上的命名规律各不相同，并且是20进制和10进制混合命名制。而12以下和13以上的数字命名规律虽不一样，但却保留12进制的命名特点。

在时间和角度方面，通常广泛使用60进制。60的约数有12个，即1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60。因此对分配物品非常方便。

至于在时间、时刻方面，1小时有60分、1分钟有60秒，这也是60进制。可是，1天24小时不是60进制，但24是12的2倍，同样也有很多约数。

还有，角度的测量单位也是60进制。1度60分($1°=60'$)，1分60秒($1'=60''$)，和时间、时刻的符号完全相同。

1周角的大小为$360°(=60°\times6)$。$\frac{1}{4}$周角为直角

(90°)，半周角，即平角(直角的2倍)是180°(=90°×2)。

我们所居住的地球表面上的位置采用经纬度，也用几度几分几秒的60进制表示。

东经起始于英国伦敦郊外格林威治天文台，往东变化范围由0°~180°，西经也起始于同一地点，往西变化0°~180°；北纬和南纬起始于赤道，分别往北和南变化0°~90°。

地球是旋转椭圆体(也称椭圆体或椭圆面)，而且几乎近似为球体，赤道半径比两极半径长约22公里，但北极略微凸起，南极稍许凹陷，因此看上去像个米粉团子。

把地球看作为球体后，并让东经、西经合并转一圈是360°，北纬、南纬合并转一次是360°。

经度纬度、时间时刻也和60进制角度一样，1°=60′，1′=60″。也就是说1度是60分，1分是60秒。

如前所述，即使一部分人现在仍然使用码磅度量衡的12进制，但世界上大多数人都使用计算方便的10进制的10进位数。这些在表1-2中是显而易见的。

当然，10进制的阿拉伯数字是10进位数，其中，1~9九个数字以及表示定位数及空位的0共有10个数字，借助这10个数字，多大的数都能表示。

还有，10进制阿拉伯数字为小数时，多么小的数也都能表示，非常方便。

可是，大数在古埃及数字中用图形表示，如图1-11所示。这种用图形表示大数的象形数字，并不比算用数字，即印度·阿拉伯数字方便。

表 1－2　国际单位制中 10 进制倍数的表示

倍数	词头	符号	中文名称
10^{18}	exa	E	艾[可萨]
10^{15}	peta	P	拍[它]
10^{12}	tera	T	太[拉]
10^{9}	giga	G	吉[咖]
10^{6}	mega	M	兆
10^{3}	kilo	k	千
10^{3}	hecto	h	百
10	deca	da	十
1			
10^{-1}	deci	d	分
10^{-2}	centi	c	厘
10^{-3}	milli	m	毫
10^{-6}	micro	μ	微
10^{-9}	nano	n	纳[诺]
10^{-12}	pico	p	皮[可]
10^{-15}	femto	f	飞[母托]
10^{-16}	atto	a	阿[托]

在古埃及象形数字中，表示大数的图案代表什么不甚明确，但据有关专家所称，表示 1 万的是一个弯曲手指尖儿的图案，表示 10 万的是一头江鳕(burbot)的图案，因为 100 万数字相当巨大，大到像惊恐状的人形图案。如此考虑过后，当时不能真实地体会 1000 万等超大数的感受，所以就推测一个含有这种意思的图形。

再有，让直立着的手杖图案代表 1，这可以联想起和阿拉伯数字的 1 完全相同。

可是，如前所述，在很久很久以前，印度人就一直

在思考大的数，并可推想数的概念（见解）都一致。

印度数学家发现了零（0），但具体是哪位古印度人还尚不清楚。古印度的数学发达，称得上大数学家的也为数众多。

阿耶波多（Aryabhata）、婆罗摩笈多（Brahmaguputa）、婆什迦罗（Bhaskara）等都是闻名的数学家兼天文学家。

可是，0（零）是表示太阳的，最初一直使用●和○来表示。零在梵语中是空的意思。

1000
千

10000
万

100000
10万

1000000
100万

10000000
1000万

图 1－11　古埃及象形数字

不久，零才逐渐演变为现在形状的 0。日本人把它（0）称为零。

0 由印度传到阿拉伯，并被译为“无”或“没有”。

在世界各国，0 有许多不同的称呼，意大利语把 0 称为“zero”，现已在世界各地通用。

在英语国际音标中，0 的拼音为[zíərou]，除此之外，0 的拼读还有好多种。

使用由 0 到 9 的 10 个数字，无论多大或多小的数，都可以表示。0 在阿拉伯数字中的用途最广，它不仅代表“没有”或“无”，并可用来表示定位数的空位（location unit），因此 0 的存在使计算变得非常简捷方便。

但是，阿拉伯数字以外的数字也能用来计算。

例如，135 + 254 = 389，而用罗马数字做此加法运算则为：CXXXV + CCLIV = CCCLXXXIX

还有，古时候日本人曾采用中国汉字做加法，如下所示，也非常烦琐。

一百三十五加二百五十四得三百八十九

由此可见，阿拉伯数字是最简单方便的常用计算数字。

古时候，数字以表示数的多少为主要目的，在计算方面，无论哪个国家都使用过算盘。

也有人说[*]，算盘是被俄罗斯俘虏的法国军人由俄罗斯带回去的。

同样，也可以用罗马数字做减法运算。

DLXXVIII－CCLVIII＝CCCXX

上式用阿拉伯数字书写则为 578－258＝320

由此可见，在罗马数字中没有表示空位的补位数字，计算起来非常麻烦。

所以，0 的发现对现代数学，更广泛地讲是对科学进步与发展做出了伟大贡献。

现在，我们毫不费力地使用着 10 进位阿拉伯数字，而且可以说在整个数学领域，0 是最伟大的发现。

§1.6 费马大定理

在发现阿拉伯数字之初，10 进位数的正整数，即所谓的自然数，是世界上众所周知最方便的数。

下面稍离正题，先来介绍一下预见了 1，2，3，…这种正整数（自然数）的费马。

17 世纪，法国有一位叫费马（1601～1665）的数学

[*]算盘始于中国明初时期，因为算盘简单易学、运算方便，通行全中国，并流传于东亚各国。——译者注

家。

他不是专职搞数学研究的专家，只是一名对学习数学感兴趣、并且还从事研究的普通知识分子。

1601年，费马出生在法国图卢兹附近的包曼·罗曼纽。从1631年起，他作为法律专家当选为当地议会议员，随后，从1648年起，当选为道罗梅地方议会贵族院终生议员，享年64岁。

他和笛卡儿、梅尔森通等数学家们彼此通信交流研究成果，但他生前从未在公开刊物上发表文章。

还有，他只叙述所研究过的定理，但从来不讲定理的证明。因此，他为后来的数学家们提供了很多研究课题，并对数学的发展有很大影响。

他的研究成果涉及很多方面。首先，在微积分方面，他考虑过在连续曲线上画切线求极值问题的方法，并引入微分概念，而且在牛顿和莱布尼茨出生前10年他就发现了微积分基础。

进一步与微积分相关的，是他发明了光的反射和光的折射原理。结果得出光学的“最短时间原理”，即费马原理。

当然，这些都对光学发展有很大影响。

在几何学领域，他奠定了与笛卡儿不同的解析几何学。笛卡儿研究的是二维（平面）解析几何学，而费马研究的是三维（立体）解析几何学。

他也与闻名的哲学家帕斯卡通过书信交流信息，从而创建了概率论。

可是，费马的最大研究成果是整数论。

他受到古希腊数学家丢番图（公元246年前后～330年前后）整数论的激励，提出费马大定理问题。

费马死后的350年期间，曾有很多数学家探讨这一问题，但至今都没能得到普遍的一般证明。

1908年，德国的沃尔夫克尔曾对此问题留有以下遗嘱："在2007年前，最先完成证明这个定理的人奖赏10万马克"。但是，由于第1次世界大战的恶性通货膨胀和战后的货币贬值，1919年(大正8年)以前的10万马克奖金，现在就不那么值钱了。

那么，费马大定理是怎样的呢？现在简单介绍如下。"有一组自然数 x, y, z，当 $x^n + y^n = z^n$，而且，当 $n = 2$时，这样三个一组的自然数可以找出无穷多个。但是，当 $n \geqslant 3$ 时，满足这种关系式的自然数 x, y, z 是否还存在呢？"

众所周知，$n = 2$ 时，$x^2 + y^2 = z^2$ 成立。这是闻名的毕达哥拉斯定理或三平方定理的公式。公元前500年前后，根据希腊数学家毕达哥拉斯公式，有 $3^2 + 4^2 = 5^2, 6^2 + 8^2 = 10^2, 9^2 + 12^2 = 15^2, \cdots$，这种 $3:4:5$ 的3个数，即 $n^2(3^2) + n^2(4^2) = n^2(5^2)$ 型的数以及 $5^2 + 12^2 = 13^2, \cdots$ 这种 $5:12:13$ 的3个数等等，可有无穷多。

但是，$x^3 + y^3 = z^3, x^4 + y^4 = z^4, \cdots$ 的整数 x, y, z 不存在，其正式的书面证明费马没有给出，而且在以后的350年，虽有很多数学家尝试过，但至今仍然没有完整的证明。

费马当年所提出的这一问题，就这样奇妙地一直流传至今。

费马说："将一个立方数分为两个立方数，把一个四次幂数分为两个四次幂数，一般地讲，一个高于二次幂的数分为两个同次幂的数都是不可能的。对此，我

确信已找到一种令人惊奇的证明方法。可惜，写下该证法的书眉太窄了”。这是费马写在丢番图《算术》希腊·拉丁语对译本书中的一段话。这本书是1621年刊印发行的。



费马(1601～1665)

在费马死后的350年期间，世界各地数学家挑战这一问题的情况，摘记于表1－3。

表1－3　费马大定理的证明进展

年代	情况摘要	证明人(国家)
1637年前后	问题的提出 $n=4$	费马(法)
1770年	$n=3$	欧拉(瑞士)
1825年	$n=5$	鲁贾道尔(法)
1839年	$n=7$	拉摩(法)
1850年	$n=$正规素数	昆马(德)
1908年	沃氏遗言：给提出证明的人赏金10万马克	沃尔夫克尔(德)
1983年	若限定 n 值，则其解也有限	法鲁台古斯(西德)
1988年	充分大的全部 n 值？	宫冈洋一(日)

请注意表中提到的1988年的记载。日本目前有人正在挑战费马大定理之解。宫冈洋一所采用的方法不是传统的方法，而且还没有得到完全解。但是，无论用哪种方法，只要能够获得解答，都可以相信。

作为本书重点的虚数单位 i 或 j，是从二次方程式解的公式中产生的。有关这方面的情况，后面还要详细叙述，在此只讲一个一元一次方程式。

丢番图(Diophantos)是费马所欣赏的《算术》一书的作者，而《算术》是几何学全盛时期出版的一部代数学专著。丢番图生卒年不详，大约是公元 246 年前后 ~ 330 年前后，并且一直都生活在亚力山大市。

但是，在他的墓碑上刻有一段奇特的墓志铭：

"丢番图度过了他一生$\frac{1}{6}$的童年，$\frac{1}{12}$的青年和$\frac{1}{7}$的独身生活。后来，婚后 5 年得子，儿子只活到父亲一半岁数，比父亲早 4 年逝世。"

根据这段文字记载，假设他死亡时的年龄为 x，从而列出一元一次方程式如下：

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

整理此式后得$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}-1\right)x=-5-4$

因此，由$\frac{3}{28}x=9$，得$\frac{x}{28}=3$，从而 $x=84$。所以，丢番图是位活到 84 岁的寿星，但这是否完全正确，也不得而知。

在此稍离正题，先介绍一些费马、莱布尼茨和牛顿有关微积分的情况。

法国人说费马是微积分的先驱者，德国人说莱布尼茨是微积分的奠基人，而英国人却主张牛顿是发明微积分的首创人。

但是，费马从来不出版著作，并且比牛顿和莱布尼茨年长约十多岁。

还有，牛顿和莱布尼茨几乎是同一个时代的人，而且当时英、德两国的关系十分紧张，自从裁决微积分发明的归属以来，两国长时间争论不休，并且不能最后断

定，从而至今仍是一件悬案。

现在认为，牛顿和莱布尼茨分别独立发明了微积分，并且创建了当前的微积分学。

但是，现在世界各地使用着的微积分符号，也就是说 y'，$\frac{dy}{dx}$，$\int f(x)dx$ 等几乎都是莱布尼茨想出来的。

当时，莱布尼茨在德国科学院等学术单位十分活跃，一时曾受到人们的极端赞扬，但他晚年却被世人淡忘、并在失意中孤独冷清地离开了人世。

相反，牛顿晚年业绩辉煌。1699 年 56 岁的他出任造币局局长，62 岁受勋封爵，死后葬于威斯特敏斯特大教堂墓地。享年 84 岁。

这里有一段粗俗的滑稽歌谣："费马点燃了（微分）灶火，莱布尼茨捣成微分黏糕，只有牛顿在乐哈哈地吃。"

歌谣中字有余浮，但世间诸事却多姿多彩。

牛顿这个人，乍看上去很有学者风度，但当时人们说："他不摆大学者的架子，待人诚恳厚道，人情味十足。"

这里值得一提的是，牛顿进入剑桥大学之前，他曾寄宿在当地一家药店。在此期间他与这家的养女陷入情网，彼此信誓旦旦，"非他不嫁、唯她不娶"，但因牛顿繁务缠身，最终来能完婚。事实上，牛顿仍把爱情留给了这位姑娘，从而终生独身。

牛顿非常喜欢猫，家里养着很多猫。屋里屋外都专门有猫咪出入的洞口。当大猫生下小猫后，牛顿让佣人给小猫仔专门开设洞口，以便小猫仔出入专用。对此，佣人认为是多此一举。但是，牛顿却固执地坚持



牛顿(1643[*]～1727)

让佣人给小猫仔另开"专用"洞口。

牛顿和苹果的故事也是众所周知的，关于这件事曾有本书中这样记载：牛顿经常出入社交界，所以屡次受到贵妇人们的询问，问他是怎样发现地球引力的。为了省略详细的讲解，牛顿拿起一个苹果并不慌不忙地展示苹果落地，从而答案就极其简单地得出了。

§1.7 2进制数的构成

从数的产生开始，我们已经讲过了整数、分数、小数等等，现在来介绍电脑中当前使用的2进位数。

首先采用10进制分解1991。众所周知，

$1991 = 10^3 \times \boxed{1} + 10^2 \times \boxed{9} + 10^1 \times \boxed{9} + 10^0 \times \boxed{1}$

这里，$10^0 = 1$

10)$\underline{1991}$　　　　(1991÷10＝199…1)

10)$\underline{199}$　…①　　(199÷10＝19…9)

10)$\underline{19}$　…⑨　　(19÷10＝1…9)

　　①　…⑨⟹　1991(10进制)

这就是1991的原形。

如果是8进制，那么1991又该如何呢？

同理，8进制的1991可分解为：

[*]原文误为1642。——编辑注

$$
\begin{array}{lll}
8\underline{)1991} & & (1991 \div 8 = 248\cdots 7) \\
8\underline{)\ 248} & \cdots ⑦ & (\ 248 \div 8 = \ 31\cdots 0) \\
8\underline{)\ \ 31} & \cdots ⓪ & (\ \ 31 \div 8 = \ \ 3\cdots 7) \\
\ \ ③ & \cdots ⑦ \Longrightarrow & 3707(8\text{进制})
\end{array}
$$

也就是说，10 进制的 1991 改写为 8 进制则为 3707，但这不是“3707”，并且要分开读为“3，7，0，7”。实际上，这是 $1991 = 8^3 \times \boxed{3} + 8^2 \times \boxed{7} + 8^1 \times \boxed{0} + 8^0 \times \boxed{7}$

因此，在 8 进制的记数方法中，只能使用 0，1，2，3，4，5，6，7 这 8 个数字。

电子计算机中所使用的 2 进位数只有 0 和 1 两个数字，而且无论多大的数都能表达。

最后，由 1 至 10 的 10 进制数用 2 进制表达的结果，列于表 1－4 中。

表 1－4　10 进制数字与 2 进制的对应关系

10 进制数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 进制数	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
数值(10 进制)	2^0	2^1		2^2				2^3		

可是，用 8 进制数表示 10 进制的 1991 则为 3707，而且如前所述，8 进制只使用从 0 到 7 的 8 个数字。因为 $8 = 2^3$，所以 8 进制数在 2 进制中用三位数表示，从而得到表 1－5 中的对应关系。例如 $7 \Rightarrow 111$，也就是说，最大的 8 进制数 7，相当于 2 进制的三位数 111，而 8 进制的 0 至 7 每个数，对应于 2 进制的三个数。

使用表 1－5 可得，10 进制 1991 是 8 进制 3707，而用 2 进制数改写则为如下所示：

$1991 \Rightarrow 3707 \Rightarrow 011, 111, 000, 111$

这里将三位数字中最前面的0去掉，从面10进制1991在2进制中则为：11,111,000,111。

表1－5　8进制与2进制的对应关系

八进制	0	1	2	3	4	5	6	7
二进制	000	001	010	011	100	101	110	111

也就是说，10进制1991改写为8进制3707都是4位数，若改写为2进制，则增加为11位数。

但是，在电子计算机中只用0和1，多么复杂的计算都变得十分简单，并且可在瞬间完成。

用电信号表示1和0的方法很多。例如，可用0代表无电压，1代表有电压。这两种状态极易控制，因面用途广泛。

但是，如果我们采用2进制来笔算，那就非常麻烦了。

这里，我们来看看10进制1991改写为2进制的情况。

由竖式可知，用2除几次的余数，逐次分别列于右端。

最后的商①以及以上逐次所得余数，按照由下而上顺序书写，则得其2进制数

2)1991
2) 995…①
2) 497…①
2) 248…①
2) 124…⓪
2) 62…⓪
2) 31…⓪
2) 15…①
2) 7…①
2) 3…①
①…①

11,111,000,111。

如前所述，准备一个像表1－6那样的换算表，再

列出一个10进制换算2进制的换算表，使用起来就会非常方便。

表1-6 10进制、8进制、2进制对照

10进制	8进制	2进制
1991	3707	11,111,000,111

可是，这样的方法是否正确无误呢？

$2\times2\times2=8$，8进制的最大数为7。可是，将7改写为2进制后，则为111，即$7\Rightarrow111$，而10进制8改写为8进制则为10，改写为2进制则为001,000，即$8\Rightarrow10\Rightarrow1000$。

8)<u> 8</u>

　　①…⓪　　$8\Rightarrow10\Rightarrow001000$

2)<u> 8</u>

2)<u> 4</u>…⓪

2)<u> 2</u>…⓪

　　①…⓪　　$8\Rightarrow1000$

由以上两种计算结果可以认为没有不合理的地方。

在此，我们来看看一种有趣的想法。

古希腊的数字是使用字母$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\cdots$等代表1,2,3,4,5…。10进制的1991，古希腊数字则为$\alpha\kappa\kappa\alpha$。为此，英语字母开始叫“α-β”，现在也还是称$a,b,c,\cdots,x,y,z$是“alphabet”(大写字母也是如此)，并把从0到15的16进制数规定如下，但数字0改用大写的O代替。

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

O A B C D E F G H I J K L M N P

采用此表考虑16进制数，因为 $16=2\times2\times2\times2$，所以16进制数即0～15在2进制中是4位数。

以16除10进制数1991，则其16进制数为

1991⇒⑦⑫⑦⇒GLG

16)1991

16) 124…⑦

⑦…⑫　　⑦→G，⑫→L

将0～15的10进制数改写为2进制数后，则列表1－7如下。

表1－7

10进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
16进制数	O	A	B	C	D	E	F	G
2进制数	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
10进制数	8	9	10	11	12	13	14	15
16进制数	H	I	J	K	L	M	N	P
2进制数	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

使用上表将10进制数1991改写为16进制数，并且使⑦⇒G，⑫⇒L，而将⑦⑫⑦改写为2进制数，

1991⇒⑦⑫⑦⇒GLG⇒0111，1100，0111

这是因为 $1991=16^2\times\boxed{7}+16^1\times\boxed{12}+16^0\times\boxed{7}$

去掉最前面的0，由右端起三位数为一段，则同8进制数改写为2进制数一样，是11，111，000，111。用16进制就简单多了。

若多用些符号，还可将10进制数更进一步用 2^5

(32),2^6(64),2^7(128)…除，从而使用32进制数，64进制数，128进制数……那就更简单了。

本书将16进制数0～15表示为O,A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,P，当然也没有什么具体的规定。

按照通常所使用的那样，将16进制数表示为0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F也可以。

为了明确我们使用惯了的10进制数的关系，也可使用0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,1^0,1^1,1^2,1^3,1^4,1^5，不必借用字母就可一目了然地清楚表示0～15诸数字，但这些数有可能与指数(幂)混淆。

这些数字是0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,1_1,1_2,1_3,1_4,1_5。

但是，和10进制数完全区分开之后，如果想使用新数字表示，则使用字母A也可以，即0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_0。

这样做不是哪个国家的法律规定，而是取自方便易懂，并且能被大家公认就可以。

如果你能够提出非常好的设计方案，说不定也会被全世界采用。

§1.8 公历和奇妙的世界历

这里，我们先稍离正题讲讲日历。

以前制做的日历，曾不妥当地规定一年有360天。

大家都知道，现在一年是365天零6小时左右，准确地讲，一年是365.2422天，即365天零5小时48分46.08秒。

为了修正365.2422和365的差别，现在所使用的公历（阳历）日历规定每4年有一次闰年，闰年有366天，而且闰年的2月是29天。

闰年之间的三年称为平年，平年有365天。其原因由下面的计算清楚可见。

$$365.2422 - 365 = 0.2422(\text{天})$$

所以，4年之间的差别是$0.2422 \times 4 = 0.9688$（天）

因此，4年之间增加$1 - 0.9688 = 0.0312$（天），而且这0.0312天是多加出来的。

公历年数为100倍数的那些年，因每4年有1个闰年，用400除不尽的1700年，1800年，1900年等是平年。

这是根据如下计算得出的结果：因为4年之间多出0.0312天，400年就多出$0.0312 \times 100 = 3.12$（天）因为必须减去3天，所以1700年，1800年，1900年即使是闰年也得算是平年。

按照以上调整，到2000年时要多出0.12天，并且这样微小的差别不能完全被修正。这种格列高利日历是教皇格列高利XIII世在1582年规定的。

查看公元前48年至公元前7年的尤利乌斯历书，其中有关于一年365天不同月份天数的差别，并规定大月称为奇数月，每月31天，而小月称为偶数月，除2月份外每月30天。也就是说，3，5，7，9，11月每月是31天，2月份是28天或29天，4，6，8，10，12月每月是30天。

可是，在公元前8年，罗马皇帝奥卡斯塔斯修改了历书并以前皇帝的名字命名七月为“July”，而以自己的名字命名八月为“August”，而且与7月相同，8月份也

是 31 天，同时按以下顺序修改 9 月为 30 天，10 月为 31 天，11 月为 30 天，12 月为 31 天。

尔后，公元 325 年，康斯坦丁皇帝在宗教议会上承认了基督教，并把春分日定为 3 月 21 日，复活节定为春分或满月之后的星期日。但在 1580 年，春分日和阳历年都偏离原定日期 10 天。格列高利教皇把 1582 年缩短了 10 天，并将春分仍定为 3 月 21 日，规定 400 年里有 97 次闰年。

经过这样修改后，大幅度地缩短了与阳历年的差别，从而使格列高利历书不仅在基督教国家广泛流传，而且现在已是世界共同采用的阳历。

现在的阳历，平年是 365 天，与已往 1 年 360 天的历书不同，其偏差小了，也能正确反映出季节变化。

古时候的日本、春、秋季不冷不热的好气候时间长，冬、夏寒冷、酷热的季节短，因而日本是适于久居的好地方，但近年来，几乎没有冬暖夏凉那种春秋季节，觉得好像由冬到夏和由夏到冬大多是急剧变化的气候。

下面，我们再简单介绍一下世界历。

世界历中，1 个月有 4 周，每月 1 号定为星期日，1 年规定有 13 个月，1 年规定有 $7\times4\times13=364$（天）。

现在，规定平年 1 年为 365 天，闰年为 366 天，所以世界历的平年每年少 1 天，闰年则每年少 2 天。

那么，不属于周一至周日 7 天之内的“多余日”，每平年多加 1 天，每闰年多加 2 天。但“多余日”是否休假？还有，闰年情况下，“多余日”是加到年末，还是 6 月末及年末各加 1 天？这些都很难定下来。

更进一步，还要考虑工资是按周发还是按月发，因

此“多余日”的待遇也是个问题。另外，多加 1 个或 2 个星期日，对教会也是件麻烦事等等。

这样，由于世界历本身困难重重，所以不能实施。

§1.9 数和数轴

由于阿拉伯数字，特别是 0 的发现，使得全世界的人现在都能够随意笔算，这确实是件大好事。

数(number)的发现稍微晚了些。出自商业交易的需要，后来在印度又发现了负的数(negative number)，而现今的数称之为正的数(positive number)或自然数(natural number)。

分数(fraction，broken number)发现得比较早，尔后很晚才发现小数(decimal fraction)。这些在前几节都曾提到过。

英语的分数一词是片断的意思，而英语小数一词是$\frac{1}{10}$的意思。

在这里出现了大家所熟悉的数轴(number line)。

首先，从 0 和自然数，即正整数，简单数轴开始，如图 1－12 所示。

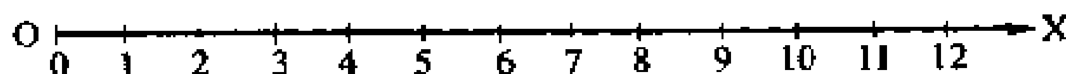


图 1－12 正整数数轴

接着，有包含正整数(自然数)、0 和负整数的全部整数数轴，如图 1－13 所示。

上图为含 0 的整数数轴。图 1－14 是正整数及 0、

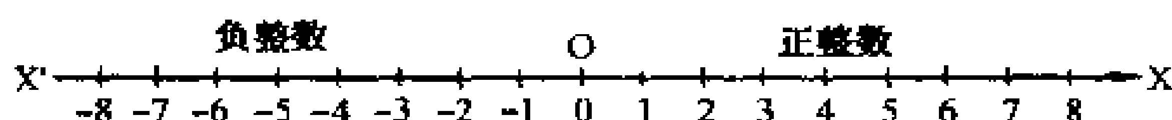


图 1-13　全部整数数轴

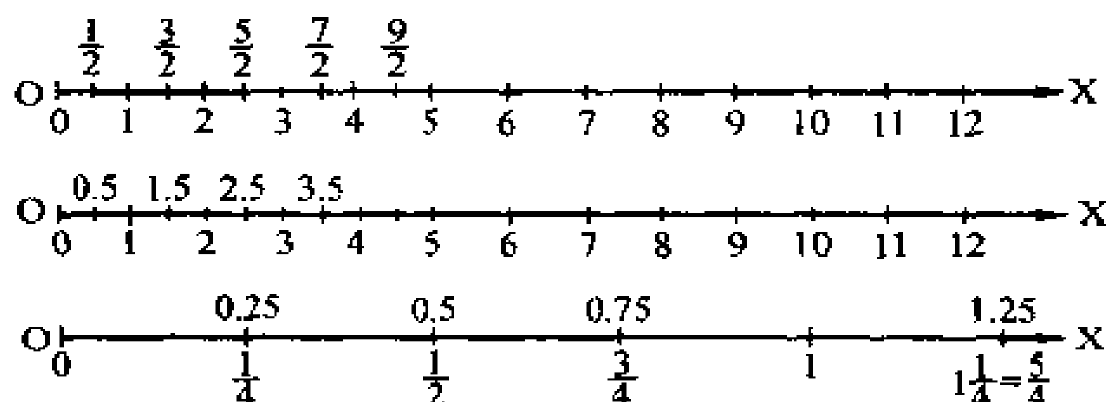


图 1-14　含 0 的正整数、正分数，正小数数轴

正分数、正小数数轴。

这些数的发现是印度和欧洲数学家的研究成果。

正整数可用来表示物体的个数和顺序等，分数是从一半$\left(\frac{1}{2}\right)$、一半的一半$\left(\frac{1}{4}\right)$等开始，它在分配物品时具有重要的作用。

除了加法和减法运算之外，还有乘法和除法运算，特别是分数和小数的运算都有非常重要的意义。

§ 1.10　有理数

整数、分数、小数归纳为一种数，统称为有理数。所谓有理数，是能够表示为分数的数，也就是说，a，b 是两个整数时，则 $a \div b = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ 成立。这里，分母绝对不可为 0。也就是说，数学中绝对禁止用 0 作除数。

有理数一定能表达为分数，例如 $2=\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$；$0.25=\frac{1}{4}$；$0.125=\frac{1}{8}$。

像有理数 $\frac{1}{3}=1\div 3$ 为 $0.333\cdots$ 这样的数，永远都是重复的小数。这种无限重复着的小数被称为无限小数(infinite decimal)。

像 $0.333\cdots$，$0.121212\cdots$ 这样同一数重复不尽的无限小数，被特别称为循环小数。

相反，无循环小数是有理数，所以应该能还原成分数。

$0.333\cdots=0.\dot{3}$，$0.1212\cdots=0.\dot{1}\dot{2}$ 这样的循环小数，是在重复的数字上面附加“·”来表示，而 $\dot{3}$ 和 $\dot{1}\dot{2}$ 被称为循环节(recurring period)。

下面来看看循环小数转化为分数的方法。

$0.\dot{3}$ 的转化比较简单，而且可以立刻知道，因为

$$0.\dot{3}=0.333\cdots=\frac{1}{3}\left(=\frac{3}{9}\right)。$$

但是，$0.\dot{1}\dot{2}=0.121212\cdots$ 转化为分数就稍为复杂。为此，我们先来考虑 $0.\dot{1}\dot{2}$ 的原形。

$$0.121212\cdots=0.12+0.0012+0.000012+\cdots$$

也就是说，$0.\dot{1}\dot{2}$ 是无穷等比级数之和。

我们知道，无穷等比级数 $a, ar, ar^2, \cdots$ 的首项为 a，公比为 r，当 $|r|<1$，则其和 S 为

$$S=\frac{a}{1-r}$$

这里，$a=0.12$，$r=0.01$，因此，$0.\dot{1}\dot{2}$转化为分数则为：$S=\frac{0.12}{1-0.01}=\frac{0.12}{0.99}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$。

这种转化方法，理由虽然充分，但不是最简单的方法。这里再给大家介绍一种方法。

设 $x=0.121212$ ①

两端各乘 100 $100x=12.1212$ ②

②式－①式得 $99x=12$，据此

$$x=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

也就是说，2 位数的循环节，就放大 100 倍计算。同理，3 位数的循环节，就放大 1000 倍来计算。

如此类推，就可得知如下：

$$0.123123\cdots=0.\dot{1}2\dot{3}=\frac{123}{999}\Rightarrow\frac{41}{333}$$

但是，让我们来看看“为何能出现循环小数呢”？

像右面这样的竖式计算，按除法运算性质，以分母除分子时，除不尽而有余数。在这种情况下，如果所出现的数与前面所剩余数相同，下一个商数就同前面的商数一样。因此，分母除分子除不尽的分数全都是循环小数。

由此可见，将循环小数化为分数时，只需将所循环部分的数字，即循环节中数字的位数有几位就用几个 9 填写在所求分式的分母中，而

```
    0.3 3…
 9)3.0
   2 7
     3 0
     2 7
       3
```

```
      0.1212…
 99)12.0
     9 9
     210
     198
      120
       99
       210
       198
        12
```

在该分子中只填写一个循环节中的数就可以。

也就是说,应该这样计算:

$$0.234234\cdots=0.\dot{2}3\dot{4}=\frac{234}{999}=\frac{26}{111}$$

接着,我们来考虑混合循环小数,即整数和小数点后不循环部分的混合循环小数。

$$
\begin{aligned}
0.12323\cdots &= 0.1\dot{2}\dot{3}=\frac{1}{10}\times 1.\dot{2}\dot{3} \\
&= \frac{1}{10}(1+0.\dot{2}\dot{3}) = \frac{1}{10}\left(1+\frac{23}{99}\right) = \frac{1}{10}+\frac{23}{990} \\
&= \frac{99+23}{990} = \frac{100-1+23}{990} = \frac{123-1}{990} \\
&= \frac{122}{990} = \frac{61}{495}
\end{aligned}
$$

因此,前面 $0.1\dot{2}\dot{3}$ 的计算可按如下方法进行。

①在分母中,把循环节数字的位数仅以 9 代之写下,紧接其后再将不循环部分数字的位数以 0 代之写下;

②在分子中,先将不循环部分数字及循环节数字写在一起,之后再减去不循环的数字。

相对于混合循环小数 $0.1\dot{2}\dot{3}$ 而言,$0.\dot{3}$ 和 $0.\dot{1}\dot{2}$ 称为纯循环小数。

另外,带小数(mixed decimal)也有循环小数。

下面,我们将 1.12323…,即 $1.1\dot{2}\dot{3}$ 化为分数来看看。

$$
\begin{aligned}
1.1\dot{2}\dot{3} &= 1+\frac{123-1}{990} \\
&= 1+\frac{122}{990} = 1+\frac{61}{495}
\end{aligned}
$$

$$=1\frac{61}{495}$$

```
       0.12323
495)61.0
     49 5
     11 50
      9 90
      1 600
      1 485
        1150
         990
        1600
        1485
         115
```

所以，带小数也能化为带分数。这是否正确，先看看上面 61÷495 的竖式计算就明白了。

图 1－15 展示出数轴上的循环小数和与循环小数类似的带小数。

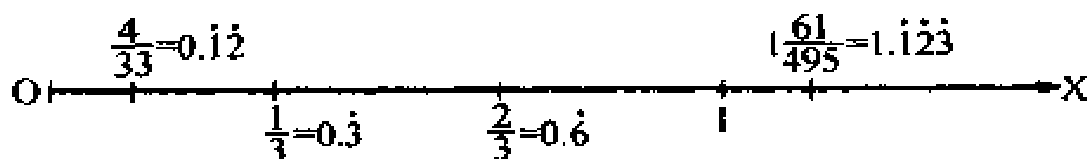


图 1－15 数轴上的循环小数和带小数

§ 1.11 负数

到现在为止，我们所讲的大部分都是正数，但如前所述，自古以来，印度数学家们就都知道有负数存在。

将正数的数轴由 0 往左延伸后，则为负数的数轴。

如图 1－16 所示，由 O(0)往左，以单位长度 1分割段之后，仿照向右侧那样，从 O 开始在其左侧也能得到 O 右侧那样的分段点。也就是说，数轴上以 O 为对称中心，1 的对称分割点为 －1，2 的对称分割点为 －2，3 的对称分割点为 －3，…这样往左延伸下去，就可获得表示负"－"数之点，这样的数有多少都可以表示出来。

据说，正(＋)、负(－)符号是由德国仓库管理员开

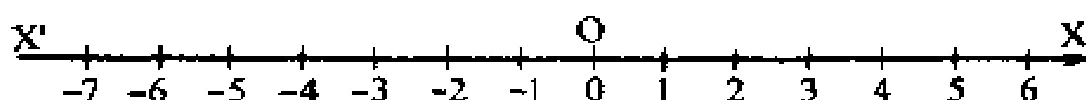


图 1-16　含有正数及负数的数轴

始使用的。15 世纪，德国一位仓库管理人根据包装箱重量比标准的重(+)或轻(-)而最先启用"-"和"+"的符号的。

这些带有"-"(负)的数叫做负的数或负数。

这样，在图 1-16 数轴上，由 O 往右的整数叫做正整数，由 O 往左的整数叫做负整数。

正整数和负整数相交在 O 处。

对应于该数轴上点的数确定之后，就有 0 和正、负的整数。

单独就整数而言，正整数和负整数是已经规定了的，其中有含 0 的时候和不含 0 的时候，从而"0 和正、负整数"的叫法是正确的。

在负数中，因为既有负的分数又有负的小数，所以当然还有 $-\frac{1}{2}$，$-1\frac{1}{3}$和 -0.5，-2.5 之类的数。

在图 1-17 的数轴上，除了整数之外，还给出了负分数和负小数。

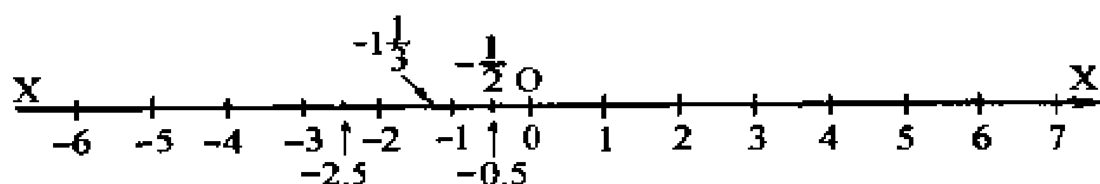


图 1-17

这里所说的负整数、负分数、负小数等，全部包括在有理数之中。

有理数是英文 rational number 的直译，但却没有“合理数”的含意。

ratio 原本是“比”的意思，也许称其为有比数更合适。比就是“有分数形式的数”。在英译日的数学专用词汇中，像有理数这样的词汇很多。由此产生的无理数和本书的书名“虚数”，也是数学术语的词汇之一。

有些含混不清的误译，在日本还有很多例子。

数年前，有人把“catastrophe”译为“破局”，因而曾在日本数学界热闹了一阵子。究其根源却发现，日文《国语辞典》中的解释与英文原有含意截然不同。

牛顿属于大器晚成的人，他很晚才上学读书，而且学习成绩不佳。因为有一次受到几位高年级同学的欺负，使他感到无地自容，从而发奋用功学习。之后，学习成绩有明显长进，继而成为世界一流的伟大数学家。这种学业上的“突变”，正相当于 catastrophe 一词的正确译意。

这里将至今所出现过的有理数归纳一下，如图 1－18所示。

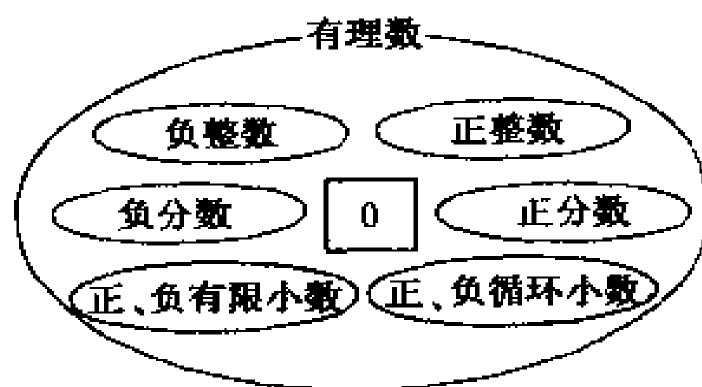


图 1－18

§ 1.12 无理数的发现

$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$等数以及 e,π 等文字之类的数确实存在。

无论什么电脑都有$\sqrt{}$(平方根)的键、最近又有带 π 键的,但不知何故仍然没有 e 键。

但是这些全是输入在电脑中的 π 和$\sqrt{}$ 的近似值。π 是圆周率,即圆周和直径长度之比,其数值为 3.1415…,e 是自然对数的底,其值为 2.7182…。

实际上,这些数是小数点后继续无穷的无限小数,而且应该称为不循环的无限小数。所谓不循环就是所出现的数字一个接一个,毫无任何规律。

至于$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$等数是代数方程式的解,故称其为代数无理数,而 e,π 等数则是有理数系数的代数方程式解中未曾见到过的数,故称为超越数。

无理数是无法写成分数形式的数,若将无理数写成小数,也只能写作无限小数。虽然无理数的近似值可写成分数,但这显然不是无理数的真实值。

这些无理数的实际数值,如下:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$$

$$e = 2.718281828\cdots$$

$$\pi = 3.14159265\cdots$$

以上这些特殊的数,经过高性能电脑处理后,小数以后多大位数的数值都能计算出来。

英国人尚克斯(1812~1882 年)于 1873 年使用马时公式已将 π 值计算到小数点后的 707 位,但后来经

过验证，其精确值仅有527位。

发明了电子计算机之后，英国有人使用马庭公式展开式，用了70个小时就已将 π 值近似计算到2035位。这大约是在50年前的1949年的计算结果。

下面摘其一部分介绍如下。

$\pi \doteq 3.141592653589793238462643383279502884$
1971693993751058209749445923078164062862
0899862803482534211706798214808651328230
6647093844609550582231725359408128481117
4502841027019385211055596446229489549303
8196442881097566593344612847564823378678
3165271201909 1……

π 精确值的世界纪录是1989年由金田康正先生计算出来的，已达到10.7374亿位数，花费时间74小时30分钟。

在小数中，既有 $0.\dot{3}$[*]和 $0.\dot{1}\dot{2}$ 之类的无限小数，又有前面介绍过的 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，e，π 这些变化无穷的无限小数。

这种新出现的无限小数是不循环的，而且所出现的数字是一个接一个地毫无规律的。这样的无限小数称为纯无限小数。

至今所出现的数中，全部都能够表示为分数的数是有理数；而这里的 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，e，π 等是不可化为分数的数。

这种不能表示为分数的数，即杂乱无序的无限小

---

[*]原文误为0.3。——译者注

数被称为无理数。但是，所谓的“无理”没有不合理的意思，也许称为无比数会令人更容易明白些。也就是说，称为无比数，实为不可转化成分数的数。

被称为 π 的超越数，实际上是从古埃及时代起就已知道的古老数。

但是，这些代数无理数 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 以及超越无理数 e，π 都可在数轴上表示，如图 1－19 所示。

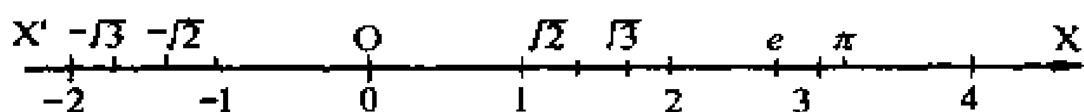


图 1－19

如果采用这种数轴，就能表示全部有理数和全部无理数。

整数和有限小数可化为有限小数的分数，有无穷多个；同样，数轴上所表示的无限小数的数目也是非常多的。

有理数和无理数统一称为实数。也就是说，数轴上的点所表示的数，全部都是实数。

下面列出实数分类表如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数　$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$
    - 分数　$\cdots,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\cdots$
    - 有限小数　$\cdots,-0.5,-0.2,0.3,1.5,2.7,\cdots$
    - 循环小数　$\cdots,-0.\dot{3},0.\dot{1}\dot{2},1.\dot{2}3\dot{4},\cdots$
  - 无理数
    - 代数无理数　$\cdots\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots$
    - 超越数　$\cdots,e,\pi,\cdots$

这样分类时,0也包括在整数之内了。当然,0在有理数中的作用是很重要的。

还有,$\frac{3}{2}$是分子比分母大的假分数,但最好还是化为$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$。

进一步,若让1表示为$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\cdots$,则整数也可化为分数。

当然,2,3,…也有时候认为是分母为1的分数。

$\frac{3}{2}$写作$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$之后,就成为带分数。

当然也可把带小数1.5看作1+0.5。

这里,带小数1.5读为“1点5”。

带分数$1\frac{2}{3}$以前读为“1又3分之2”,但最近也有人读作“1和3分之2”。

以上介绍的是数产生的梗概情况,但是否所有的数全部亮相了呢?没有!还有一个非常重要的数将在第2章中介绍。

§1.13 欧洲也使用算盘计算

关于数的情况,大家差不多已经有了一些了解,但也许有人对计算还存在疑问。

古时候是怎样计算的呢?对这个问题,下面略作交待。

如前所述,印度·阿拉伯数字是印度人发明的,并由阿拉伯人传播到欧洲,之后经丝绸之路由欧洲传到

以中国为主的东方国家。

在日本，从明治时代开始正式启用阿拉伯数字。当时数学不是一门学问，它只是出自证税及经商需要才产生并流传下来的。在没发现零(0)及阿拉伯数字前，人们使用算盘计算。

早期的计算工具叫算具(ab'acus)，算具与日本算盘不同，算具连幼儿园的孩子们都会使用。

在相当长的一段时间里，日本一直都在使用算盘。

在今天的电脑和计算机普及之前，算盘作为重要的计算器具一直被广泛使用，几乎家家都有算盘。

现在，算盘计算的方便快捷仍不减当年，甚至还出现了名片大小轻而薄的计算器。

自古以来欧美国家也使用算盘进行计算，像日本珠算那样注有1级、2级、3级等顺序，但不是竞争计算快捷准确的等级。

日本人手巧，日本人的珠算可谓“天下无敌”

现在，也有单比赛珠算和电脑计算速度技巧的。另外，珠算练习也是培养计算能力的好手段。

因为日本人心灵手巧，并且善于模仿，而其仿制效果可达到以假乱真的程度，甚至比原本固有的还好。

相反，日本人的科学思考和创造能力却稍逊一筹。教育要培养创造力和思考力，这是非常必要的，但目前仍未达到应用效果，这只好期待未来的教育改革。

笔者在中学时代，即大约50年前，理科老师曾对我们讲过：“利用原子裂变可制造具有强大破坏力的炸弹。”另外，还听说过：“不用去电影院就可在自己家里看电影。”大约又过了10年，即1945年(昭和20年)，美国在日本的广岛和长崎投下两颗原子弹。战后不久

又有电视机出现。

日俄战争中，俄国士兵使用了机关枪（海军叫机关炮），第二次世界大战中又出现了原子弹，日本都惨遭失败。

拿破仑皇帝讲过："数学进展与国家的繁荣昌盛息息相关。"高斯讲过："数学是科学的女皇。"这两句话，真可谓精辟永存的至理名言。

§1.14 计算机程序

由于电子计算机的发展，目前已在普及个人和学校中的微型电脑，所以最后这一节稍微介绍一下电脑程序。

首先，关于圆周率的近似值，阿基米德提出的范围早已闻名于世，而且至今仍然在使用。

阿基米德认为，圆周率 π 近似值应存在于以下范围之内：$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，即$\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$。可是，这些数改写为小数后，是循环小数。甚至用笔算也能简单得出它们的数值。

使用电脑，要按电脑程序计算。

? 2/3：? PRINT　计算$\frac{2}{3}$值并打印 0.666667

? 2/3 #：#　精确计算$\frac{2}{3}$值到小数点后第 16 位，最后为 0.6666666666666667

同理，

? 22/7 #　3.142857142857143

? 223/71 #　3.140845070422535

以下为$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$精确计算到小数点后第15位数值

? SQR(2 #) $\sqrt{2}$的开平方值 1.414213562373095

? SQR(3 #) $\sqrt{3}$的开平方值 1.732050807568877

接着是圆周率π小数点后第15位近似值。

? 4 * ATN(1 #)(π =)3.141592653589793

下面,使用正切函数 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 的反正切函数 $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$,由 $\pi=3\arctan\sqrt{3}\left(=3\times\frac{\pi}{3}\right)$ 而得出π的近似值。* 为(相)乘,ATN(x)为 $\arctan x$,即 x 的反正切。

? 3 * ATN(SQR(3 #))

($\sqrt{3}$的反正切值)

3.141592653589793

很长一段时间里,在欧洲π的近似值取为$\frac{355}{113}$,这相当于112位循环小数。此数值自古以来就为中国采用[*]。

π的近似值有以下关系:

$$3.14<\pi<\frac{355}{113}<3.1416<\frac{22}{7}$$

在$\frac{355}{113}$这个数值中,小数的前六位是精确的,所以其误差小于百万分之一。

附带说一下,使用3.1416的误差小于十万分之一。

---

[*]我国古代大数学家祖冲之(429－500年)最早提出圆周率$\pi=\frac{355}{113}$,比西方数学家的发现早10个世纪。——译者注

$$\frac{355}{113}=3.\dot{1}41592920353982300884955752212389380530973451327433628318584070796460176991150442477876106194690265486725663716\dot{8}$$

这相当于 112 位循环小数。这是用袖珍电脑计算的结果。

所使用的袖珍电脑程序记之如下。

```
10  INPUT A,B
20  N=0
30  Q=INT(A/B)
40  R=A-Q*B
50  PRINT N,Q
60  A=R*10
70  N=N+1
80  GOTO  30
90  END
```

此程序含意,解释如下。

10　A=355,B=113 输入电脑

20　准备 N,并令 N 为 0

30　令不大于 A/B 值的最大整数为 Q

40　令 A－Q×B 为 R

50　计算 N 和 Q

60　令 R×10 为 A

70　令 N 比原值大 1

80　转入运行标号 30 的程序指令

90　程序运行结束

在已经出版的《π 的奥秘》一书(堀場芳数著,朴玉芬译,科学出版社,1998)中,π 的电脑计算程序有 9

例，但前些时候原东北大学教授、理学博士平山谛提出使用5个展开式计算 π 的电脑程序。这5个程序使用的电脑是富士通 M760/6，所用的算法语言是 FORTRAN 77，并且得到奈良女子大学副教授、工学博士西冈弘明先生的协助。

● $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{5^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\frac{17}{4}$

```
* PI(NO.1)
  REAL * 8PI
  PI = 6 * (DSQRT(25.0D0 + 0.75D0 * * 2)
       - 1.7D1/4) * * 3
  WRITE( * , * )'PI = ',PI
  STOP
  END
PI = 3.14090428274336 97
```

● $\pi=3+\frac{1}{7}-\frac{1}{700}+\frac{1}{700\times9}+\frac{1}{700\times9\times30}$

```
* PI(NO.2)
  REAL * 8 PI
  PI = 3.0DO + 1/DBLE(7) - 1/DBLE(700)
       + 1/DBLE(700 * 9) + 1/DBLE
       (700 * 9 * 30)
  WRITE( * , * )'PI = ',PI
  STOP
  END
PI = 3.141592592592592 0
```

● $\frac{\pi}{4}=22\tan^{-1}\frac{1}{28}+\tan^{-1}\frac{1}{56544}$

```
* PI(NO.3)
  REAL * 8PI
  PI = 88 * DATAN(1/28.0DO)
        + 4 * DATAN(1/56544.0DO)
  WRITE( * , * )'PI = ',PI
  STOP
  END
PI = 3.1415926571500545
```

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots$$

```
* PI(NO.4)
  REAL * 8PI,X
  PI = 1.0DO
  X = 0.5DO/4
  DO 10 I = 2,50
  PI = PI + X/DBLE(I * 2 - 1)
  X = X * DBLE(I * 2 - 1)/DBLE(I * 8)
10    CONTINUE
      PI = PI * 3.0DO
      WRITE( * , * )'PI = ',PI
      STOP
      END
      PI = 3.1415926535897842
```

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{5\cdot3^2}-\frac{1}{7\cdot3^3}+\frac{1}{9\cdot3^4}-\cdots\right)$$

（シャープ公式展开式）

```
* PI(NO.5)
  REAL * 8PI,X
```

```
      PI = 1.0D0
      X = 1.0D0
      DO 10I = 1,1000
      X = X/3.0D0
      IF(MOD(I,2).EQ.0)THEN
        PI = PI + X/DBLE(I * 2 + 1)
      ELSE
        PI = PI - X/DBLE(I * 2 + 1)
        ENDIF
   10   CONTINUE
        PI = PI * 2.0D0 * DSQRT(3.0D0)
        WRITE( * , * )'PI = ',PI
        STOP
        END
        PI = 3.1415926535897922
```

下面,给出 π 和 e 连分数分母展开式的电脑程序及使用袖珍电脑的计算结果。

```
10  DIM  A(40)
20  INPUT  X#
30  M# = X#[*] * 1000000000000000
40  N# = 1000000000000000
50  FOR  I = 1 TO  20
60  A(I) = INT(M#/N#)
70  K# = M# - INT(M#/N#) * N#
80  PRINT  A(I);
90  M# = N#:N# = K#
```

[*]原文误为 M#。——译者注

```
100   NEXT   I
```

π:输入 X# =3.14159 26535 89793 时,π 的连分数展开式首先是整数 3,其后所排列的连分数分母为 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14

e:输入 X# =2.71828 18284 59045 时,e 的连分数展开式首先是整数 2,其后所排列的连分数的分母为 1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1

自然对数底 e 的近似值可精确到 16 位有效数字。

以下介绍采用 e 的展开式之电脑程序。

● $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

```
* CONSTANT E
  REAL * 8E,X
  E=0.0 DO
  X=1.0 DO
  DO 10 I=1,100
  E=E+X
  X=X/DBLE(I)
10   CONTINUE
     WRITE(*,*)'E=',E
     STOP
     END
```

E=2.7182818284590433

● e 展开式 $\left(e=1+\sum_{I=1}^{N}\frac{1}{I!}\right)$ 的计算机程序

(精确到小数点后第 15 位数字)

```
10   INPUT   N
```

```
20  K# =1:S# =1
30  FOR I=1 TO N
40  K# =K# *I
50  S# =S# +1/K#
60  LPRINT I,S#
70  NEXT I
```

输入 N=20 时，e 值的输出为：

```
1   2
2   2.5
3   2.66666 66666 66667
4   2.70833 33333 33333
5   2.71666 66666 66667
6   2.71805 55555 55556
7   2.71825 39682 53968
8   2.71827 87698 4127
9   2.71828 15255 73192
10  2.71828 18011 46385
11  2.71828 18261 98493
12  2.71828 18282 86169
13  2.71828 18284 46759
14  2.71828 18284 5823
15  2.71828 18284 58995
16  2.71828 18284 59042
17  2.71828 18284 59045
18  2.71828 18284 59045
19  2.71828 18284 59045
20  2.71828 18284 59045
```

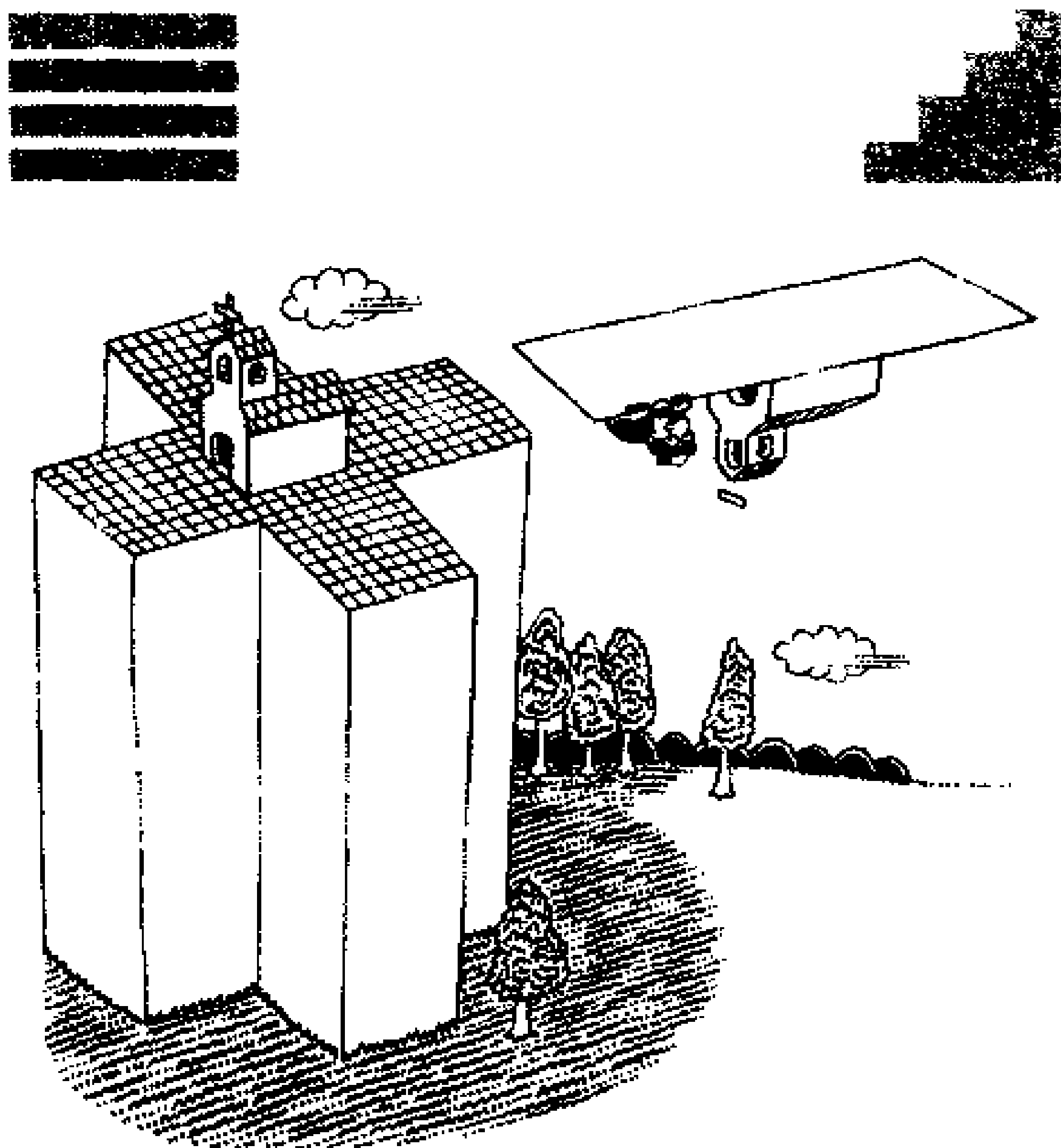
$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\cdots$

第2章

平方为负的数

——从2次方程式解到

虚数单位 i 的发现——



§2.1 怎样计算龟鹤算问题

众所周知，自古以来就有“龟鹤算”这一类计算问题。俗话说：“千年鹤，万年龟”，通常认为龟鹤是长寿命动物的代表。实际上，鹤大约只能生存60年，龟也只能活170年。

例题 龟与鹤共有7只，它们的腿加起来是22条。问龟、鹤各有几只？

此题解法很多。首先，用小学算术解答。其中的一个方法给出如下。

解：如果7只全都是鹤，则腿的总数为$2\times7=14$条。可是，已如此题共有22条腿。$22-14=8$条腿，是多出来的龟腿数。如果1头龟代替1只鹤，腿的数目就要增加2条。这里，$8\div2=4$。因此，应该只有4头龟。

所以，鹤的数目为$7-4=3$只，

答：有3只鹤、4只龟。

除此之外，还有各种计算方法。例如，先考虑全部7只都是龟，那时龟腿总数为$4\times7=28$条。$28-22=6$是多出来的鹤腿数，这相当于有$6\div2=3$只鹤，而龟则有$7-3=4$只。

§2.2 方程式求解法

如果是小学高年级生或中学生，则可使用被称为变数的未知数x和y，求解如下。

解：设龟的数目为x，则鹤的数目为$7-x$。因为

每只龟有4条腿，每只鹤有2条腿，因此能得到以下方程式：

$$4x + 2(7 - x) = 22$$

展开上式后，则有 $4x + 14 - 2x = 22$

整理 x 的同类项后，$2x = 8$

两端除以2，得 $x = 4$

所以，鹤有 $7 - 4 = 3$ 只。

答：有3只鹤、4只龟。

在此问题中，将鹤的数目当作 x 也可以，这样，方程式则为 $2x + 4(7 - x) = 22$，并且 $-2x = -6$ 两端除以负的数之后，得 $x = 3$。这种解法对中学生还可以，对于小学高年级生也许就稍微难了些。

这种使用未知数 x 的一次方程式解题的方法称为一元一次方程式解题法。

如果使用 x 和 y 两个未知数解题，结果又如何呢？

解：设鹤的数目为 x，龟的数目为 y，由头数和腿数可列出2个方程式如下。

$$x + y = 7 \quad (1)$$

$$2x + 4y = 22 \quad (2)$$

可是，(2)式各项系数均为偶数，两端除以2后，可以简化为(3)式

$$x + 2y = 11 \quad (3)$$

这里，解(1)和(2)的联立方程，如同改为解(1)和(3)的联立方程一样。因为(2)和(3)是同值方程式。也就是说

$$2x + 4y = 22 \Leftrightarrow x + 2y = 11$$

在此，(3) - (1)得 $y = 4$。

将 $y = 4$ 代入(1)后，由 $x + 4 = 7$，$x = 7 - 4$，

据此，$x=3$。

答：龟有4只，鹤有3只。

可是，(1)－(3)后，$-y=-4$，两端除以－1，则 $y=4$，这对小学生来讲，也有些困难。我们看到，无论用算数方法解，还是用一次方程式求解，其答案当然完全相同。

这种解题方法，因为是使用 x 和 y 两个未知数（元）的联立方程式，故称为二元联立方程式。

因为这种问题使用的是龟和鹤，自古以来就被称为龟鹤算题。

这样，不管各有几条腿，规定二种以上不同数目腿的问题，统称为龟鹤算问题。

例如，农夫和稻草人的问题也如此。但在这种情况下，农夫有2条腿，如果稻草人不是1条腿的，而是2条腿，则就不是龟鹤算之类的问题了。

再有，甚至10条腿的乌贼和8条腿的章鱼也属龟鹤算问题。可是，没有腿的木桶和幽灵之类，就不是龟鹤算问题。还有，2种不同类（型）的东西，两者的腿数都相同，那也不是龟鹤算问题。

前面所讲的算式也包括在联立方程式解法之内，因为两式相加或相减后，可以消去一个未知数。

因此，从广泛意义上讲，称为消去法更合适。

也就是说，在未知数多的联立方程式中，逐个消元并顺次求出全部未知数。

因此，加减法是一种消去法，通常称为加减消去法。

此外，还有代入消去法。下面来看看这类问题的另一种解答方法。

例题　一张长方形的纸，其相邻边之和为7厘米，面积为12平方厘米。试问该长方形纸的相邻边各有多长？

解：设长方形纸相邻边长为x厘米和y厘米，并按题意列出2个等式

$$\begin{cases} x + y = 7 & (1) \\ xy = 12 & (2) \end{cases}$$

由(1)式可知

$$y = 7 - x \qquad (3)$$

将(3)式代入(2)式后得

$$x(7 - x) = 12$$

上式展开得

$$7x - x^2 = 12$$

按x^2系数为正及x的降幂顺序整理上式后，则

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

这里，左端二次三项式可因式分解为

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

据此　　$x = 3$，或 $x = 4$

将此结果代入(1)式得$y=4$，或$y=3$[*]。

答：相邻边长为3厘米和4厘米。

此解法中出现的$x^2 - 7x + 12 = 0$方程式，叫做二次方程式或一元二次方程式。

下面，再介绍另一种解题方法。

解：如果取长方形的长边为x厘米，则其短边应为$(7 - x)$厘米。

可是，已知长方形面积为12平方厘米，所以可有

[*]原文漏掉此步骤。——编辑注

以下二次方程式 $x(7-x)=12$。

展开此式，整理并因式分解后，

$$x^2-7x+12=0,(x-3)(x-4)=0$$

则可得到前一解法相同的答案，$x=3,4$。

可是，最初假定长边为 x 厘米，故 $x=4$ 厘米，而短边边长是 $7-4=3$ 厘米。

这种解题法所得到的 $x=3$，是不合适的答案。

那么，左边二次三项式可以因式分解，所以就意外简单地解答此题，但对一般二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0, a, b, c \text{ 为常数})$$

并不都能分解为两个因子，那时此问题就不能这样做了。

这时，就得使用二次方程式解的公式。

此公式是公元7世纪时最先由印度伟大数学家婆罗摩笈多发现的。

在说明怎样产生该公式之前，先讲讲印度数学家们的一些情况。

公元六世纪，印度数学非常发达。众所周知，由于10进制记数法和0的发现，使笔算成为可能，并有负数的发现等等很多创造发明。

以上这些，据说都是阿耶波多学派的发现。

发现二次方程式解公式的婆罗摩笈多，于公元598年出生在印度西北部的乌贾因州，享年不明，他既是一位数学家又是一位天文学家。

公元628年，他出版了《婆罗摩修正体系》一书，书中批判了印度古老的阿耶波多学说，并且叙述了算术及计算方法等。

另外，该书还介绍了一次方程式和二次方程式的

解法以及使用0的10进制数和无穷大的研究。

下面继续介绍二次方程式解的公式。

§2.3 二次方程式的求解公式

稍微复杂点，让我们来看看二次方程式$ax^2+bx+c=0$($a\neq0$，a，b，c 为常数)解的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ 是怎样得出的。

二次方程式的各项系数 a，b，c 均为常数，x 是未知数(变数)，这些都是实数。

因为 $a\neq0$，将 a 提出后，二次方程式则成为

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

首先，以 a 除等式两端，则其形式改变为

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

将上式左端凑成完全平方三项式，即改变为$(x-\alpha)^2$形式，则有

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

移项

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

等式两端同时开平方后

则 $$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$

移项，使等号左端仅为 x

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

将等号右端归并为一项后

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$，即为所求。

这就是二次方程式，更确切地说，是一元二次方程式解的公式。式中 $\pm\sqrt{A}$ 是 $+\sqrt{A}$ 和 $-\sqrt{A}$ 的意思。

在此来看看，使用此公式求解前面提到的长方形问题。

因为 $a=1, b=-7, c=12$，所以

$x^2 - 7x + 12 = 0$ 的解为

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}, x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

故 $x=4$ 和 3，即为所求。

如果利用这个公式，那么，二次方程式解就可表示为所求方程式系数的代数式。

此公式应该是高中学生尽人皆知的公式。

可是，如果 x 的一次项系数为偶数，即 $b=2b'$，则该公式就会更简单。

将 $b=2b'$ 代入该式，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

则

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

故 $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

例题 求解 $x^2 - 2x + 1 = 0$

解:因 $a = 1, b' = -1, c = 1$,

所以

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \times 1}}{1}$$

故

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 1},$$

$$x = 1(\text{重复解})$$

这样,x 值只有 1 个时,叫做"有重复解"或"双重解"。过去还称其为"重根"。

这是因为已知方程式$(x-1)^2 = 0$,故 x 值只有 1 个。

为易懂起见,上面采用了一个简单例题,即使例题更复杂些,同样也完全能够解出来。

§2.4 虚数单位 i 是怎样产生的

那么,我们现在来看看,如何利用二次方程式的求解公式,挑战比较复杂一些的问题。

例题 求解 $x^2 + 2x + 3 = 0$

解:因为 x 的一次项系数为偶数,

所以

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 3}}{1}$$
$$= -1 \pm \sqrt{-2}$$

看到这种 $x = -1 + \sqrt{-2}$的答案，大家无不感到奇怪。整体来讲，$\sqrt{-2}$这种数是什么数呢？

至今已出现了各种各样的数，但往往总是规定$\sqrt{\quad}$内必为0或正数。也就是说，是(实数)$^2 \geqslant 0$的数。

$\sqrt{-2}$是平方为负的数。

例如，$2^2 = 2 \times 2 = 4, (-2)^2 = -2 \times -2 = 4, 0^2 = 0$，所以不应该有平方为负的数出现。

这里所出现的数与以前的数不同，它不是实数。

这种新数叫做虚数。正确地讲应称之为纯虚数。

这种数原本是“想像中的数”的意思，即不是实际存在的数。

所谓虚数是平方为负的数，没有“空”和“无”之类的含意，而是人们聪明的头脑中所想像出来的新数。

翻开《英日辞典》看看，imagine 有“想像”、imaginary 有“想像的”、“假想的”之类虚构的译意。

把它译为虚数，并不是当初日本数学家的英语水平低。

在古希腊和古印度时期，没有平方根为负的数，若偶然出现也将它抛弃。

反过来看此事实，当初的数学家实际上不知道虚数确实存在。

不过，16世纪在意大利盛行求解三次方程式方法的竞争，这时虚数的存在已告一段落。肯定确认虚数，即平方为负的数之后，三次方程式的实数解也就名正

言顺了。

这里提到了三次方程式，所以就换个话题，稍微讲讲三次方程式解法的传说。

三次方程式的一般通用解法，经常被称为"卡尔塔诺解法"。可是，发现此解法的人是意大利数学家塔尔塔利亚(Nicolo Tartaglia,1499～1557)，其真实名姓为尼柯·冯塔那(Nicolo Fontana)。

塔尔塔利亚的意大利语是"口吃的人"。

他出生于家境贫困的农民家庭，生下来不久父亲就去世了，是母亲一手将他抚养成人。

6岁时他曾遭骚乱之难，并被攻战意大利的法军士兵砍伤头部，也有传说他被暴乱的法军士兵割了舌头，从而留有口吃的病根。

由于家境贫困，无钱交纳学费，所以他从小不能进学校读书，只靠呆在家里自学数学，并借助他语言学方面非凡的记忆力，逐渐掌握了英、法、德以及拉丁语和希腊文，从而可以自由阅读外文数学书刊读物。

他曾在米兰大街上开设了一家"数学咨询事务所"，用以维持生计。他勤于钻研数学和苦于奋斗的结果，使他发现了三次方程式的一般解法。

可是，当时流行数学竞赛的风尚，所以他的发现不能公开发表。

那时候有一位叫卡尔达诺(Hieronymo Cardano,1501～1576)的数学家，得知此情就多次向尼柯·冯塔那讨教，但却屡遭拒绝。可是，卡尔达诺挖空心思地百般乞求，并在"绝不外传"誓言约束下，尼柯·冯塔那勉强答应了卡尔达诺。

可是，怎么也没想到，后来卡尔达诺竟大言不惭地

以“本人独自发现”发表了三次方程式解法。尼柯·冯塔那气愤地抗议卡尔达诺的背信弃义，并对他撕毁誓言的不道德行为严加斥责，但卡尔达诺对此一直保持缄默。

卡尔达诺是数学家，也是位医生。后来一段时期还担任过意大利帕维亚市市长，甚至还是娶山贼女儿为妻的专业赌博能手，素有“天才狂人”之雅号。

现在回过头来继续讲，确认虚数定义中平方为负的数。$i^2=-1$，这是虚数的七个奥秘之一。

同样，$\sqrt{-2}$，$-\sqrt{-2}$，$\sqrt{-3}$，$-\sqrt{-3}$之类的数皆为虚数（纯虚数）。

这里我们再来看看与此相同的实数。

按规定$\sqrt{4}=2$，$-\sqrt{4}=-2$，但平方为 4 的数却有 2 和 -2 两个数。

因为$\sqrt{\ }$（读为平方根号或省略读为根号）经常都是正的，至于平方为负的虚数却有正和负的两个。

因此，$\sqrt{-4}$，$-\sqrt{-4}$的平方都是-4。

作为表示虚数的符号，取其英文字头 i，规定虚数定义为 i。

虚数单位 i 是平方为 -1 的数。也就是说，$i^2=-1$或 $i=\sqrt{-1}$。

确定虚数单位为 i 的人是瑞士数学家欧拉，他还计算过圆周率 π 并且确定自然对数的底为 e，他是因促进数学发展而闻名于世的伟大数学家。有关欧拉的生平事迹将留在第 7 章中详述。

定义平方为 -1 的数有两个，1 个是 $i=\sqrt{-1}$，还有一个是 $i=-\sqrt{-1}$。

这样规定之后，刚才平方为 -4 的数也有 2 个，一个为 $\sqrt{-4}=2i$，另一个是 $\sqrt{-4}=-2i$。

这样，使用虚数单位 i 之后，前面讨论过的二次方程式 $x^2+2x+3=0$ 的解（根）$x=-1\pm\sqrt{-2}$ 则可表示为 $x=-1\pm\sqrt{2}i$。

这样，通常将 $-1+\sqrt{2}i$，$-1-\sqrt{2}i$ 用一般形式表示为 $a\pm bi$ 或 $a\pm ib$。但这里的 a，b 皆为不是 0 的实数。$(a+bi)$ 这种形式的数叫做复数。

可是，复数不是实数，复数是不考虑大小关系的。也就是说，出现了没有大小关系的“新数”，这也是虚数七个奥秘之一。

在使用复数的电工学中，规定 i（电流强度）表示电流，所以就用 j 表示虚数单位，从而有 $-1+j\sqrt{2}$，$-1-j\sqrt{2}$ 这样的表达方式。也就是说，在电工学中，复数是 $a\pm jb$（a，b 为实数，j 为虚数单位）。

因此，$j^2=-1$，$j=\sqrt{-1}$，并按通常习惯像 $a\pm jb$ 那样，将 j 写在 b 之前。

那么，现在再回头看看二次方程式和三次方程式的问题。

例题　求解 $x^2-4x+7=0$

解：由二次方程式解的公式和 x 的一次项系数为偶数可知，$x=2\pm\sqrt{4-7}$，所以 $x=2\pm\sqrt{-3}$。

据此，$x=2\pm\sqrt{3}i$

因此答案为 $x=2+\sqrt{3}i$，$x=2-\sqrt{3}i$

例题　求解 $x^3-6x^2+15x-14=0$

解：设等式左端为 $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$$

将 $x=2$ 代入上式后

因为

$$f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 15 \times 2 - 14$$
$$= 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

所以该方程式左端含有 $(x-2)$ 因子。

在此，像右侧竖式那样，以 $(x-2)$ 除之可得

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 7 \\ x-2 \overline{) x^3 - 6x^2 + 15x - 14} \\ \underline{x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} \\ -4x^2 + 15x \qquad \\ \underline{-4x^2 + 8x \qquad} \\ 7x - 14 \\ \underline{7x - 14} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2-4x+7)=0$$

因此，$x=2, x^2-4x+7=0$

由前面例题可知，$(x^2-4x+7)=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=0$

所以，此例题的答案可由 $(x-2)(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=0$ 得知。

故 $x=2, x=2\pm\sqrt{3}i$ 共有 3 个答案。

例题 已知电阻 R 为 8Ω(欧姆)、阻抗 $\dot{Z}$ 的虚数部分为 $X=6\Omega$，在串联电路中施加交流电压 100V 时，按下列公式计算所流过的电流值 I 和功率 $\cos\theta$。

公式：

$$\dot{Z} = R + jX, \dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}, |\dot{I}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{X}{R}$$

解：由阻抗公式得 $\dot{Z} = R + jX = 8 + j6$

电流 $\dot{I}$ 由 $\dot{Z} = \dfrac{\dot{V}}{\dot{I}}$ 可知

$$\dot{I}=\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}=\frac{100}{8+j6}=\frac{100(8-j6)}{(8+j6)(8-j6)}$$

$$=\frac{100(8-j6)}{8^2+6^2}=\frac{100(8-j6)}{100}$$

所以，$\dot{I}=8-j6$

据此，$I=|\dot{I}|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}$，$\therefore I=10(\mathrm{A})$

这是所求的电流强度。

接着，假定功率角为 θ

$$\theta=\tan^{-1}\frac{X}{R}\qquad 可知$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{6}{8}，据此\ \tan\theta=\frac{3}{4}$$

由图 2－1 可知，

$$\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}=0.8$$

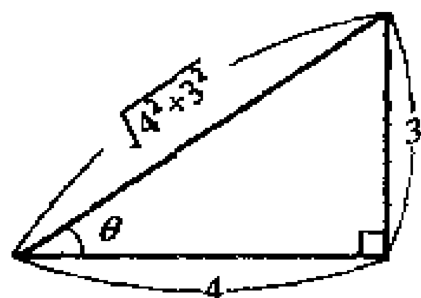


图 2－1

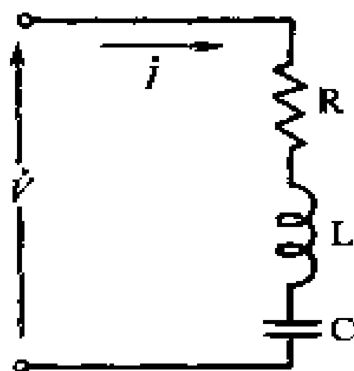


图 2－2

这是回路功率。

可是，在含有线圈 L，电容 C 和电阻 R 的回路中有交流电通过时，电压 $\dot{V}$ 与电流 $\dot{I}$ 成比例，而阻抗 $\dot{Z}$ 为其比例系数。

还有，用三角函数表示电压和电流位相偏移角 θ 时，则回路功率为 $\cos\theta$。

再者，为了强调交流电理论中电流、电压为复数所表示的量，在它们的符号上方附加"·"。

因为不太习惯这种例题，也许会感到困难些，但在电磁学中这却是非常重要的基础知识。

当然，这也不是高中水平的问题，升入大学学习交流电理论时，肯定会遇到此类问题。

还有，交流电压和电流是正弦振动变化的，也就是说是按正弦曲线振动交化着的，因此可用三角函数来表示。

在第 4 章中要介绍的三角函数和复数，当然是颇有缘分的。

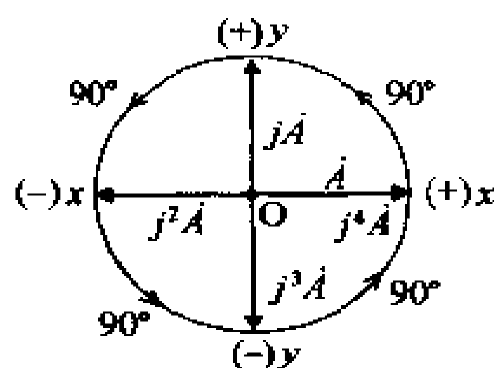


图 2-3

在交流电理论和电气回路问题中使用复数，原本是因为交流电与三角函数有一种切也切不断的关系，所以使用复数后的代数计算非常简单方便。

在接着往下讲之前，还有一个重要问题需要交待。

如图 2-3 所示，取 x 轴和 y 轴，并以 O 为中心，之后规定 x 轴的右侧为正(+)，左侧为负(-)；y 轴上方为正(+)，下方为负(-)。

这里引入了具有方向和大小的向量。例如，力为向量。

请大家联想高中数学和物理中有关力的回忆。

取向量 $\dot{A}$(或 $\overrightarrow{A}$)为 x 轴正(+)方向，取 $j\dot{A}$(或 $j\overrightarrow{A}$)与正方向的 y 轴一致。

$j^2\dot{A} = -\dot{A}$ 与 x 轴负方向一致。

还有，$j^3\dot{A}=-j\dot{A}$ 与 y 轴负方向一致。

而 $j^4\dot{A}=-j\dot{A}$ 又返回原来的位置。

再有，A 上面附加的“·”是表示 A 为复数的意思，这在前面已经提及。

按以上那样考虑过后，虚数单位 j 乘 A 向量后，其向量大小 $|\dot{A}|$ 不变，而仅其方向反时针（向左）旋转 90°。

因此，反过来将 $-j$（负的虚数单位）乘向量 $\dot{A}$ 后，该向量大小 $|\dot{A}|$ 不变，而仅其方向顺时针（向右）旋转 90°。

一般情况下，若 n 为正整数，j^n 则为反时针旋转 $90°\times n$，而 $(-j)^n$ 则为顺时针旋转 $90°\times n$。

§2.5 三次方程式的一般解

近代数学中，三次方程式的一般解法介绍如下。

直接叙述这个问题是相当困难的，所以先从二次方程式解法讲起。

最简单的二次方程式具有以下形式。

$x^2-2x=0$，因数分解后，则为

$x(x-2)=0$，故 $x=0,2$。

这种因数分解是使用提出共同因数的公式

$$ma+mb=m(a+b)$$

由于 $x(x-2)=0$，故 $x=0,2$ 是代数学的基本性质，而且使用“$A\cdot B=0$ 的充分必要条件是 $A=0$ 或 $B=0$”，即 $A\cdot B=0\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$，反之亦然，$A=0$ 或 $B=0\Rightarrow A\cdot B=0$。改写之后则 $A\cdot B=0\Leftrightarrow A=0$ 或 $B=0$。在数学方面，“$A=0$ 或 $B=0$”是指“A,B 至少有

一个为 0"。

也就是说，$A=0$，即 $B\neq0$；$A\neq0$，即 $B=0$，甚至 $A=B=0$都可以。



图 2-4 集合图

这些用集合图描绘，则为图 2-4 中的双斜线部分所示。

下面举出一个因数分解为$(x-a)(x-b)$形式的例子。

例如，$x^2-5x+6=0$，此方程式可分解为$(x-2)(x-3)=0$，所以 $x=2$ 和 3。

再举一个可分解为$(ax-b)(cx-d)$形式的因式，例如，$6x^2-19x+15=0$，该方程式可分解为

$$(2x-3)(3x-5)=0，故\ x=\frac{3}{2},\frac{5}{3}。$$

这三个例题当然也可用二次方程式求解公式来解。

现在我们来看看三次方程式问题。如果三次方程式的因数有 1 个是已知的，其所余下的就是二次方程式了，这可用因式分解，也可使用求解公式来解。所以，关键是先找到一个因数，这并不是很难的问题。

下面介绍一种叫做因数定理求解的简便方法。

也就是说，将方程式解(根)的数值代入原方程式后，使等式两边的数值相等，即左端＝右端。

将这称为“解的值满足原来的方程式”。

详细讲来，即

$x^2-5x+6=0$ 的解为 $x=2,3$，将 2 或 3 代入原来方程式，则有

$$2^2-5\times2+6=4-10+6=0$$
$$3^2-5\times3+6=9-15+6=0$$

这种方法可书写如下

当 $f(x)=x^2-5x+6$，则 $f(2)=2^2-5\times2+6=4-10+6=0$，即 $f(2)=0$。同理，$x=3$ 时，则 $f(3)=0$。

这里，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$

进一步，解三次方程式 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 时，将 $x=1$ 代入左端的 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$，则

$$f(1)=1^3-6\times1^2+11\times1-6$$
$$=1-6+11-6=0$$
$$即\ f(1)=0$$

因此，$x^3-6x^2+11x-6$ 可以用 $(x-1)$ 除尽。

按竖式除法运算后，

$$\begin{array}{r} x^2-5x+6 \\ x-1\overline{)\,x^3-6x^2+11x-6} \\ \underline{x^3-x^2\qquad\qquad} \\ -5x^2+11x\qquad \\ \underline{-5x^2+5x\qquad} \\ 6x-6 \\ \underline{6x-6} \\ 0 \end{array}$$

$$x^3-6x^2+11x-6$$
$$=(x-1)(x^2-5x+6)$$

所以应有 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$，

这里，$x=1,2,3$ 即为所求的解。

在此计算中，将 $x=1$ 代入原方程式而得 $f(1)=0$，将 $x=2$，$x=3$ 代入后也可得出 $f(2)=0$，$f(3)=0$。

为了求解三次方程式，重要的是使用因式定理先得到一个因式，进而求得1个解，所剩余的两个解可利用因式分解或二次方程式解的公式求解，但一般三次方程式的求解并不这么简单。

那么，现在来介绍三次方程式的一般求解方法。

这稍微有些麻烦，但只好按顺序逐一调查研究。

三次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1}$$

（这里 $a\neq 0, a, b, c, d$ 为常数）

为了求解(1)式，首先得想办法找出没有二次项的三次方程式。

为此，
$$令\ x=y-\frac{b}{3a} \tag{2}$$

将(2)式之值代入(1)式：

$$a\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

展开此式，并按 y 的降次幂顺序整理排列得

$$a\left\{y^3-3\times\frac{b}{3a}y^2+3\left(\frac{b}{3a}\right)^2y-\left(\frac{b}{3a}\right)^3\right\}+$$

$$b\left\{y^2-2\times\frac{b}{3a}y+\left(\frac{b}{3a}\right)^2\right\}+cy-c\left(\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

$$ay^3-by^2+\frac{b^2}{3a}y-\frac{b^3}{27a^2}+by^2-\frac{2b^2}{3a}y+\frac{b^3}{9a^2}+$$

$$cy-\frac{bc}{3a}+d=0$$

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+d-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}=0$$

两端除以 $a(\neq 0)$

$$y^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)y+\left(\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}\right)=0$$

为方便起见，令 $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}=3p$；

$$\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}=-2q$$

所以

$$y^3+3py-2q=0 \tag{3}$$

为了求解上式这种没有 y^2（二次项）的三次方程

式(3)，再令

$$y = A + B \tag{3)'$$

于是，

$$y^3 = (A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

经移项整理有

$$y^3 - 3AB(A + B) - (A^3 + B^3) = 0$$

所以

$$y^3 - 3ABy - (A^3 + B^3) = 0 \tag{4}$$

通过比较(3)式和(4)式，有

$$\left.\begin{aligned} AB &= -p \\ A^3 + B^3 &= 2q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A^3B^3 &= -p^3 \\ A^3 + B^3 &= 2q \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(5)式中 A^3、B^3 是未知数，p、q 是常数，故(5)式是二元一次联立方程式。

利用下面要讲的根与系数关系，可将(5)式改写为一元二次方程式。

也就是说，$ax^2 + bx + c = 0$，因 $a \neq 0$，故两端同时除以 a，则为

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{6}$$

另一方面，以 α、β 为两个解的二次方程式

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \tag{7}$$

比较(6)和(7)两个方程式，

可得

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

所以，由这 2 个解和方程式解(根)与系数的关系，取 $\alpha + \beta = p$，$\alpha\beta = q$ 时，则有解为 α，β 的二次方程式 $x^2 - px + q = 0$。利用此关系式，并令未知数 A^3、B^3 为方程

式的 2 个解，从而可得变数 t 的二次方程式

$$t^2-(A^3+B^3)t+A^3B^3=0 \tag{8}$$

(5)式代入(8)可简化为

$$t^2-2qt-p^3=0 \tag{9}$$

借助二次方程式解的公式解方程式(9)，因该式中一次项系数为 2，是偶数，所以有

$$t=q\pm\sqrt{q^2+p^3}$$

据此，$A^3=q+\sqrt{q^2+p^3}$，$B^3=q-\sqrt{q^2+p^3}$，所以 A，B 分别为

$$A=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}},B=\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

将上式 A，B 值代入(3)′式后

$$y=A+B=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}} \tag{10}$$

(10)式为三次方程式(3)的 1 个解，另外 2 个虚数解，如以下章节所确认那样，则为 $\omega A+\omega^2B$ 和 $\omega^2A+\omega B$。这里出现的 ω 是 1 的虚数立方根 $x^3=1$ 的解，也就是说

$$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

换言之，1 的立方根有三个解，即 1，ω，ω^2（参见第 6 章）。即

$$\omega^3=1,\omega^2+\omega+1=0 \quad 成立。$$

下面就来验证 $y=\omega A+\omega^2B$ 是三次方程式(3)的一个解。

$$\begin{aligned}y^3&=(\omega A)^3+3(\omega A)^2(\omega^2B)+3(\omega A)(\omega^2B)^2+(\omega^2B)^3\\&=(\omega A)^3+(\omega^2B)^3+3(\omega A)(\omega^2B)(\omega A+\omega^2B)\end{aligned}$$

$$= \omega^3 A^3 + \omega^6 B^3 + 3\omega^3 ABy$$
$$= A^3 + B^3 + 3ABy = 2q - 3py$$

即

$$y^3 = 2q - 3py$$

所以

$$y^3 + 3py - 2q = 0$$

这恰好就是(3)式。换句话说，$y = \omega A + \omega^2 B$ 满足方程式(3)。同样，$y = \omega^2 A + \omega B$ 也满足方程式(3)。

因此，没有二次项的三次方程式(3)的解，由(10)式可写为

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

是一个实数解。另外2个虚数解为：

$$y = \omega \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \omega^2 \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

和

$$y = \omega^2 \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \omega \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

可是，(2)式中 $x = y - \dfrac{b}{3a}$，将 y 值再代入后，x 的三次方程式(1)有以下三个解：

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}} - \frac{b}{3a}$$

$$x = \omega \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \omega^2 \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}} - \frac{b}{3a}$$

$$x = \omega^2 \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \omega \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}} - \frac{b}{3a}$$

当然，$3p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2}$，$-2q = \dfrac{d}{a} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{2b^3}{27a^3}$

例题　求解三次方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x - 9 = 0$

解：$x=y-\dfrac{b}{3a}=y-\dfrac{-6}{3\times 1}=y+2$

将 $x=y+2$ 代入三次方程式得

$$(y+2)^3-6(y+2)^2+9(y+2)-9=0$$

上式展开并整理后得

$$y^3+3\times 2\times y^2+3\times 2^2\times y+2^3$$
$$-6(y^2+2\times 2y+2^2)+9y+18-9=0$$
$$y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24+9y+9=0$$
$$y^3-3y-7=0 \qquad (1)$$

由于

$$3p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}=\frac{9}{1}-\frac{(-6)^2}{3\times 1^2}=9-12=-3$$

所以 $p=-1$

$$-2q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}$$
$$=\frac{-9}{1}-\frac{-6\times 9}{3\times 1^2}+\frac{2\times(-6)^3}{27\times 1^3}$$
$$=-9+18-16=-7;\ -2q=-7$$

所以 $q=\dfrac{7}{2}$

将 p,q 这些值代入 A,B

$$A=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+(-1)^3}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}-1}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{45}{4}}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+\sqrt{45})}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}$$

$$B=\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+(-1)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}-1}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{45}{4}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-\sqrt{45})}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}$$

所以(1)式之解为

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}$$

$$y=\omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}$$

和 $$y=\omega^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}+\omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}$$

有三个解,从而求解三次方程式(1)的答案为

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}+2$$

$$x=\omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}+2$$

和

$$x=\omega^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}+\omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}+2$$

一度难解的三次方程式一般解法也是通过卡尔达诺的著作对外公开发表的。5 次以上的方程式也被很多数学家这样研究过。

4 次方程式和 3 次方程式的一般解法是同时由同一出版物公布于众的。

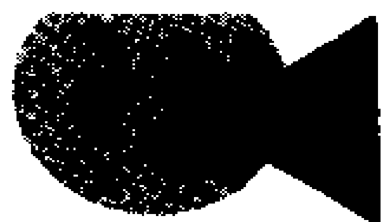
事实上,4 次方程式解法是卡尔达诺的学生费拉利创立的,所以发表在同一著作中而流传于世。

为此,据传"抨击卡尔达诺骗取塔尔塔利亚研究成果的争论也就缓和下来了"。

关于4次，5次，…n次方程式的一般解法，就只好依靠专著来解决了。

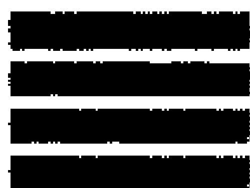
现在，由于计算机的出现，高次方程式，即3次以上方程式的解题答案，可精确到小数点后任何位数。因此，当代数学界已无人关心很高次方程式解的问题了。

第3章



怎样计算复数

—— 虚数单位 i 与复数四则运算 ——







§3.1 使用虚数单位的数

$a+bi$(a,b 为实数,i 为虚数单位)取名为复数,这是复数的定义。

现在,我们来看看 $-1+\sqrt{2}i$ 这类复数。根据复数定义,这里 $a=-1$,$b=\sqrt{2}$。

一般情况下,复数就是这种形式。如果 $a=0$,$b\neq 0$ 时,则复数为 $0+bi$,即只为 bi,这种虚数是纯虚数。

相反,当 $a\neq 0$,$b=0$ 时,$a+bi=a+0i=a$,则复数不存在,而只有实数 a。

尤其在 $a=0$,$b=0$ 时,$a+bi=0+0i=0$,则是个实数,而且是表示整数零(0)的实数。

由以上3种情况可见,复数 $a+bi$(a,b 为实数,i 为虚数单位)中即有实数(即有理数和无理数),也有虚数(纯虚数),当然也包括零(0)在内的实数。

更确切些说,复数表示所有的数。

此时,在 $a+bi$ 中,a 称为实部或实数部位,b 称为虚部或虚数部位。

请注意,不要把 bi 和虚部或虚数部位搞错。

这样,可将复数的分类情况列出如下。

- 复数
  - 实数
    - 有理数(整数,分数,有限小数,循环小数)
    - 无理数
      - 代数无理数($\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,…)
      - 超越数(e,π,…)
  - 虚数(纯虚数)($-\sqrt{2}i$,$-3i$,$\sqrt{2}i$,$3i$,…)
  - 一般复数($1+2i$,$2-\sqrt{3}i$,…)

前面的二次方程式 $x^2+2x+3=0$，解之得 $x=-1\pm\sqrt{2}i$，其中的 ±（正负符号）是将 +（正）、-（负）合二为一，实际应写为 $x=-1+\sqrt{2}i$，$x=-1-\sqrt{2}i$。这在前面也曾有过提示。

可是，$a+bi$，$a-bi$ 两个复数的实数部位 a 相同，而其虚数部位的大小相同，符号相反，则这两个复数互称为共轭复数（conjugate complex）。

那么，复数有哪些性质呢？

第一个要考虑的是两个复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 的相等，即复数相等规定如下。

在 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 两个复数中，只有当 $a=c$，$b=d$ 时，才有 $z_1=z_2$。

因此，下面的关系式成立。

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d。$$

也就是说，$a+bi=0$ 时，定有 $a=b=0$。

对复数的各种计算，实际应怎样做才好呢？让我们略微想想看。

下而，就先来讲讲复数的四则运算（four operation，four rules，four arithmetical operation）。

§3.2 复数的加法与减法运算

首先介绍加法（addition）运算。

两个复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$（a，b，c，d 为实数，i 是虚数单位），其和 z_1+z_2 的计算方法定义如下。

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a+bi)+(c+di)=a+c+bi+di \\ &= (a+c)+(b+d)i \end{aligned}$$

也就是说，两个复数相加后的实数部位为其实数部位之和$(a+c)$，两个复数相加后的虚数部位为其虚数部位之和$(b+d)$。

这里，列举一个具体实例。

例题 当$z_1=2+3i$，$z_2=-3-2i$，试求两个复数之和z_1+z_2。

解：

$$
\begin{aligned}
z_1+z_2&=(2+3i)+(-3-2i)\\
&=2-3+3i-2i\\
&=-1+i
\end{aligned}
$$

下面再介绍复数减法(substraction)运算。

有关减法运算定义如下

$$
\begin{aligned}
z_1-z_2&=(a+bi)-(c+di)=a-c+bi-di\\
&=(a-c)+(b-d)i
\end{aligned}
$$

也就是说两个复数相减为这两个复数的实数部位之差$a-c$，以及带有i的这两个复数虚数部位之差$(b-d)i$。

在此，举例如下。

例题 当$z_1=2+3i$，$z_2=-3-2i$时，求2个复数之差z_1-z_2。

解：

$$
\begin{aligned}
z_1-z_2&=(2+3i)-(-3-2i)\\
&=2+3+3i+2i\\
&=5+5i
\end{aligned}
$$

答案为$5(1+i)$。

§3.3 复数的乘法与除法运算

继加法、减法之后，让我们来看看如何定义复数的乘法和除法运算。

首先，2个复数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 的乘积，展开计算如下。

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

这里，展开括弧并取 $i^2 = -1$，整理后得出其乘积的结果。

下面列出复数乘积的实例。

例题 当 $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -3 - 2i$ 时，试求两个复数之积。

解：

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i)(-3 - 2i) \\ &= 2 \times (-3) + 2 \times (-2i) + 3i \times (-3) + \\ &\quad 3i \times (-2i) \\ &= -6 - 4i - 9i - 6i^2 = (-6 + 6) - (4 + 9)i \\ &= 0 - 13i = -13i \end{aligned}$$

答案为虚数(纯虚数) $-13i$。

最后介绍2个复数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 的除法计算方法。

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

上面曾将除法改写为分式，并以其分母的共轭复数乘该分式的分子、分母，而使分式分母实数化。也就是说分式的分母中不含 i。而且，分式的分子由其实数部位和附有 i 的虚数部位构成，因为除法的除数 $z_2 \neq 0$。

除法运算的实例，示出如下。

例题 当 $z_1 = 2 + 3i$，$z_2 = -3 - 2i$ 时，试求 2 个复数之商 $z_1 \div z_2$。

解：

$$z_1 \div z_2 = (2 + 3i) \div (-3 - 2i)$$

$$= \frac{2 + 3i}{-3 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(-3 + 2i)}{(-3 - 2i)(-3 + 2i)}$$

$$= \frac{-6 + 4i - 9i + 6i^2}{(-3)^2 - (2i)^2} = \frac{-12 - 5i}{9 + 4}$$

$$= -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$$

接着来看看复数平方和立方的计算方法。

这种计算是复数乘法计算的应用。

复数 $z = a + bi$ 的平方

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2$$

$$= a^2 - b^2 + 2abi$$

下面就来讲一个例子。

例题 $z = 2 - 3i$，计算 z^2 之值。

解：

$$z^2 = (2-3i)^2 = 2^2 + 2\times 2\times(-3i) + (-3i)^2$$
$$= 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 9 - 12i = -5 - 12i$$

复数 $z = a + bi$ 的立方,则为

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$$
$$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

此外,提出其中的共同因子后,

$z^3 = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)i$　更好些。

再来看下面一个实例。

例题　当 $z = 2 - 3i$ 时,计算 z^3 之值。

解:

$$z^3 = (2-3i)^3$$
$$= 2^3 + 3\times 2^2\times(-3i) + 3\times 2\times(-3i)^2 + (-3i)^3$$
$$= 8 - 36i + 54i^2 - 27i^3 = 8 - 54 - 36i + 27i$$
$$= -46 - 9i$$

§3.4　复数运算法则

一旦新发现的虚数扩展为复数,至今所使用的各种实数运算法则,例如,交换运算法则、结合运算法则、分配运算法则等,能否也在复数中使用呢?

对实数而言,$a + b = b + a$,$a\times b = b\times a$ 成立。众所周知,这是交换运算法则。

复数的交换运算法则(commutative law)也成立。即 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,$z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$

实数的结合运算法则,$(a+b)+c = a+(b+c)$,

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$成立。

如下所示，复数的结合运算法则(associative law)也成立。

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$
$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$$

最后，实数的分配法则

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$
$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$$

成立，复数的分配法则如下所示，同样也成立。

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$$
$$(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$$

§3.5 怎样使用虚数单位 i

虚数单位 i 的发现扩大了数的定义范围，但在数的计算方面，引入虚数至今仍无任何变化。

这里将 i 的正确使用方法，以实例简单介绍如下。

(1) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-3}=2i\times\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i^2$

$$=2\times\sqrt{3}\times(-1)=-2\sqrt{3}。$$

这是采用 i 的计算结果。

另外，$\sqrt{(-4)(-3)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 是一个所谓的计算结果，所以 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-4)(-3)}$。

通常规定，$a<0,b<0$ 情况下，$\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$。

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{2i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{2\times(-1)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\sqrt{\frac{3}{-4}}=\sqrt{-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{3}{4}}i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

所以这两个所谓的计算结果$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-4}} \neq \sqrt{\frac{3}{-4}}$。

因为通常规定，$a<0, b>0$ 情况下，

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \neq \sqrt{\frac{b}{a}}$$

大家知道，中学里所学的平方根计算公式规定，当 $a>0, b>0$ 时，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$。

还有，当 $a>0, b<0$，或 $a<0, b>0$ 时，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，并且当 $a>0, b<0$，或 $a<0, b<0$ 时，$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$。

再者，使用 $i^2=-1$ 也可得出以下计算结果

$$i^3 = i^2 \times i = -i, i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$

因此，i 的偶次方为 $+1$ 或 -1，i 的奇次方可为 $+i$ 或 $-i$。

由以上结果可知，i^n（n 为正整数）是 1、i、-1、$-i$ 四个之中的 1 个数。这也是虚数的七个奥秘之一。

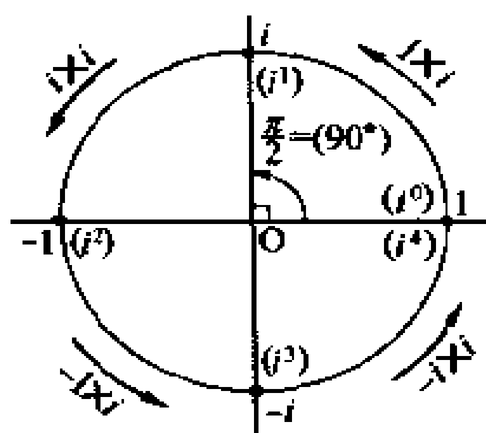


图 3-1

将此奥秘图示于第 4 章中所讲的复数平面上，从半径为 1 的圆的 4 等分点（i^0）开始，每乘一次 i 就向左旋转$\frac{\pi}{2}$（$=90^\circ$）。

这种概念在电工学中也有说明。三相交流电就是以每次旋转$\frac{2}{3}\pi(=120^\circ)$为基础的。

§3.6 虚数和复数计算结果的考察

利用复数和虚数计算得到的各种有关结果，仅供参考而汇总如下。

首先，从计算结果为0讲起。

(1) $0\times(a+bi)=0+0i=0$

(2) $(a+bi)\times 0=0+0i=0$

(3) $$0\div(a+bi)=\frac{0}{a+bi}=\frac{0\times(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{0-0i}{a^2+b^2}=\frac{0}{a^2+b^2}=0$$

(4) $$(a+bi)-(a+bi)=(a-a)+(b-b)i=0+0i=0$$

(5) $$(a+bi)+(-a-bi)=(a-a)+(b-b)i=0+0i=0$$

当然也有 $i^2+1=0$

下面是计算结果为实数的情况。

(1) $$(a+bi)+(a-bi)=a+a+bi-bi=a+a+(b-b)i=2a+0i=2a$$

(2) $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

也就是说，共轭复数的和与积为实数。

这也是虚数的七个奥秘之一。

$(3)(a+bi)-(c+bi)=a-c+bi-bi=a-c$

$(4)(a+bi)+(c-bi)=a+c+bi-bi=a+c$

如前所述，i 的 n 次方，当 n 为偶数时，其结果为实数，并等于 1 或 -1。

(5)当 $m=0,1,2,3,\cdots$ 时，$i^{2m}=\pm 1$，所以，$i^0=1$，$i^2=-1$，$i^4=(-1)^2=1$，…。

当然，也会有以下这样的结果。

$(6)i^3 \div i=i^2 \times i \div i=i^2=-1$

$(7)i^5 \div i^3=i^2 \times i^3 \div i^3=i^2=-1$

$(8)3i \div i=3$

接着，计算结果为虚数（纯虚数）的有：

$(1)(a+bi)-(a-bi)=a+bi-a+bi=2bi$

$(2)(a+bi)+(-a+bi)=a+bi-a+bi=2bi$

如前所述，i 的奇数次方为纯虚数，并等于 $-i$ 或 i。

$(3)i^3=i^2 \cdot i=-i, \quad i^5=i^2 \cdot i^2 \cdot i$

$=(-1)(-1)i=i,\cdots$

当然，也会有如下这样的结果。

$(4)(i-1)^2=i^2-2i+1=-1-2i+1=-2i$

下面讲讲计算结果为复数的情况。

$(1)(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(2)(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

$(3)(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$(4)(a+bi)\div c=\frac{a+bi}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}i$

$(5)(a+bi)\div di=\frac{a+bi}{di}=\frac{(a+bi)i}{di^2}=\frac{ai+bi^2}{-d}$

$$= \frac{-ai+b}{d} = \frac{b}{d} - \frac{a}{d}i$$

但是,(1)中只有 $a \neq -c, b \neq -d$,(2)中只有 $a \neq c, b \neq d$,(3)中只有 $ac \neq bd, ad \neq -bc$,(4)中只有 $\frac{a}{c} \neq 0, \frac{b}{c} \neq 0$,(5)中只有 $\frac{b}{d} \neq 0, \frac{a}{d} \neq 0$ 时,以上结果才成立。

(6) $i(i-1) = i^2 - i = -1 - i$

今后,大家请随意考查。

但是,无论 i 的方次多大,其结果不外是 $i, -i$ 及 1 与 -1。

§3.7 能否在数轴上表示虚数

对复数来说,其实数部位的 a,虚数部位的 b 都是实数,并且实数是能够在数轴上表示的数。

实数平方绝对不为负,经常总是正的数或 0。这里将一些实数在数轴上标出之后,如图 3-2 所示。

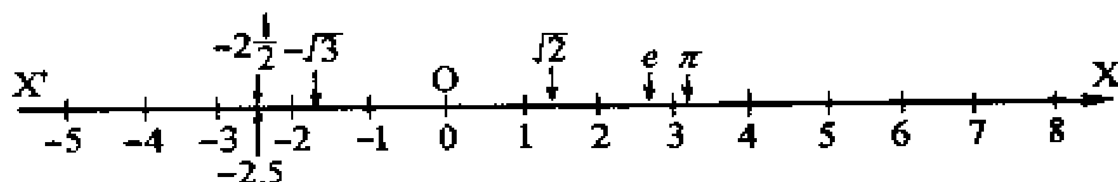


图 3-2 数轴上的一些实数

图 3-2 中 π 为圆周率,e 为自然对数的底数。π 和 e 都是超越数。显然,数轴上的数有大小之分。

但是,虚数是没有大小关系的。也就是说,虚数顺序是不能规定的。因此,数轴上所表示的只有实数。

要是那样的话,很难具体考察虚数和复数。

想像中的数在图上也应该能看得见，即可以在图上表示虚数和复数。在这方面作出过贡献的是德国数学家高斯(Carl Friedrich Gauss，1777～1855)。

因此，复数平面(complex number plane or complex plane)又称为高斯平面(Gaussian plane)。

§3.8 天才少年高斯

高斯平面的出现在数学史上是一个转折点，而高斯在电磁学领域的研究成果，已在当前录相带和磁卡中得到广泛应用。为此，下面对高斯生平略加介绍。

平方为负的数不存在是古人深信不疑的，而对此最早产生怀疑的人是16世纪意大利数学家卡尔达诺(H. Cardano 1501～1576)。



卡尔达诺(1501～1576)

如前所述，此人曾把塔尔塔利亚，即尼柯·冯塔那所创立的三次方程解法冠以“卡尔达诺公式”对外发表，并被世人称为“天才狂”的人。

另外，吉纳尔(L. Gérard，1590～1633)和笛卡儿(R. Descartes，1596～1650)都曾进一步推进将平方为负的数取名为虚数。

在18世纪，德国数学家高斯想出复数平面，并且引入了复数 $z=a+bi$(a,b 为实数，i 为虚数单位)的图解表示，而且规定 $\sqrt{-1}=i$。



高斯(1777～1855)

因此，复数平面至今也被称为高斯平面。

另外，以高斯命名的还有表示磁场强度的磁通密度单位“高斯(G)”。

1930年以来，在厘米、克、秒(CGS)单位制中，规定高斯(G)为磁通密度单位。

附带说明一点，在长度为米(m)、质量为千克(kg)、时间为秒(s)、电流为安培(A)的MKSA制中，磁通密度单位为特斯拉(T)，而且1T(特斯拉)＝10000G(高斯)。

据说，高斯于1777年出生在德国的一个贫穷的烧砖工人家庭。

父亲想让少年高斯继承父业，长大后当烧砖工，但母亲深知儿子头脑聪明过人，因而主张让小高斯多学些知识。

母亲是伟大的。十月怀胎，阵痛产子，为的是望子成龙，这是每个时代母亲们的共同梦想和期望。

虽然说法不一，但作为母亲的榜样，古往今来常常引用孟母三迁的故事。

最初，孟子随母亲住在紧靠寺庙的坟地附近，因而孟子幼年经常玩一些有关丧葬事典和诵读经文之类的游戏；后来孟母带着儿子搬家到商业繁华的闹市区，少年孟子便喜欢模仿商人叫卖，并且总是算计着挣钱。最后，孟母带着儿子搬家到学校附近，这里的环境适宜学习功课，从而孟子奋发用功读书，以至后来成为与孔子并论的伟大学者。

现在，日本的孩子们对漫画和游戏机等的兴趣比学习功课更入迷。

但是，硬逼着搞那些“填鸭式”的教学也没有必要。

如果孩子有自学欲望，并且是自然而然地努力学习知识，则其实力定会不断增长。

美国著名教育家约翰·丢依（John Dewey，1859～1952）在有关教育的演讲中曾说过：“没有必要硬逼着教给年幼孩子攀登楼梯的方法。如果双手、双脚和头脑这五体受到完善的教育感化，孩子自然而然就能上、下楼梯，并且最好到那时再进行扎实的教育”。

当时德国平民家的孩子，虽然天资聪明，智力发达，但要想受到高深教育，还必须要有社会名流资助。高斯母亲对儿子的非凡才能早有先见之明，从而想方设法让高斯会见了领主费迪南德公爵。

公爵接见少年高斯后，对他的非凡才能十分赏识，从而欣然出资赞助高斯的全部学业。也就是说，相当于目前为高材生提供就学机会的奖（助）学金。

此后，由于这个缘故，高斯得以不断求学深造。

可是，费迪南德公爵的军队被法国拿破仑大军战败后，这意味着高斯失去了经济来源，从此必须完全靠自己努力而另谋生计。

这样，高斯只好暂时放弃科研工作，出任大学教授和天文台台长，并完全靠工资维持家庭生活。

尽管如此，这段时期高斯依然研制出望远镜、正确计算了地球公转轨迹，并根据他的这种计算，至今仍确认地球公转轨道是以太阳为1个焦点的椭圆形轨道，甚至也可以说是近似圆形的椭圆形轨道。

后来，德国天文学家开普勒（1571～1630）以此观



拿破仑皇帝(1767～1821)



费迪南德公爵(1735～1806)

点为基础，提出行星轨道为椭圆，太阳为该椭圆上的一个焦点，发表了行星运动第一定律。尔后，牛顿以万有引力定理从数学方面严密而恰如其分地证明了高斯的观点。因此，天文学方面的这些辉煌成就也与高斯紧密相关。

高斯从小就喜欢数学计算。在他 10 岁还是小学生时，就已经知道等差级数和的公式。这令老师十分惊讶。这也是有关少年高斯聪明天才的闻名故事。

也就是说，首项 a_1，公差为 d 的等差级数，第几项为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，其 n 项之和为：

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots \\
&\quad + a_1 + (n-1)d \\
&= (a_1 + a_n) \times n \div 2 \\
&= \frac{n(a_1 + a_n)}{2}
\end{aligned}
$$

这是已知末项情况下的 n 项和。如果末项为未知，而仅知项数 n 和公差 d，也能计算 n 项和的 S_n 值

$$S_n = \frac{n\{a_1 + a_1 + (n-1)d\}}{2}$$

$$= \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$$

现在,使用上述两个公式都可计算 S_n 值。

一次,高斯的小学老师提出一个问题:

"计算 $S_{50} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50$ 之值"

高斯立刻写出计算结果为:

$S_{50} = (1 + 50) \times 50 \div 2 = 51 \times 25 = 1275$

高斯所用的计算方法是根据以下等式得出的:

$$\begin{array}{rl} S_{50} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 \\ S_{50} &= 50 + 49 + 48 + \cdots + 1 \\ +) \hline 2 \times S_{50} &= 51 + 51 + 51 + \cdots + 51 \end{array}$$

所以,$S_{50} = (1 + 50) \times 50 \div 2 = 51 \times 25$

当高斯把这种计算方法告诉老师后,老师十分惊讶。

这样看来,当时的小学数学老师还不知道等差级数和的公式。

高斯学生时期就发表了有关最小二乘法和整数论的研究论文,这让当时的教授们非常吃惊。除此而外,在高斯所研究的课题中还有以下内容:天体运行轨道的测定、误差论、前面讲过的复数图解法(即高斯平面)、高次方程解法以及圆周等分法等等。

高斯知识广泛,才智过人。他所研究的领域涉及数学、天文学、电学、磁学等诸多方面。他早期较重视理论研究,后期多偏重数学领域中的应用研究。

高斯被后人誉为"数学王子",并且与牛顿、阿基米

德共同列为世界三大数学家，因而高斯的名字深受全世界数学家赏识。

高斯被称为计算天才，他本人长大后也常对人说："我在学会说话前就能计算"之类的笑谈，并且还说："计算是我的业余乐趣"。

高斯自幼对数字有特殊的敏感，传说在他3岁时就发现过父亲算账时的计算错误。据说，为帮助父亲处理征税事务，少年高斯还给父亲做了一件随身携带的计算器。

这些传闻故事，哪一个是真实的，目前还很难确认。

总之，除了高斯平面外，在现代科学中还有很多是以高斯命名的定理、公式和单位名称。例如，曲面论中的高斯定理、高斯公式，微积分中的高斯公式，调和级数中的高斯定理，向量分析中的高斯定理和高斯级数，高斯曲率、高斯物镜成像、高斯光学、高斯误差定律、高斯微分方程、高斯变分问题、高斯分布等等很多很多。

对此感兴趣的读者，请翻阅数学和物理方面的专门读物。

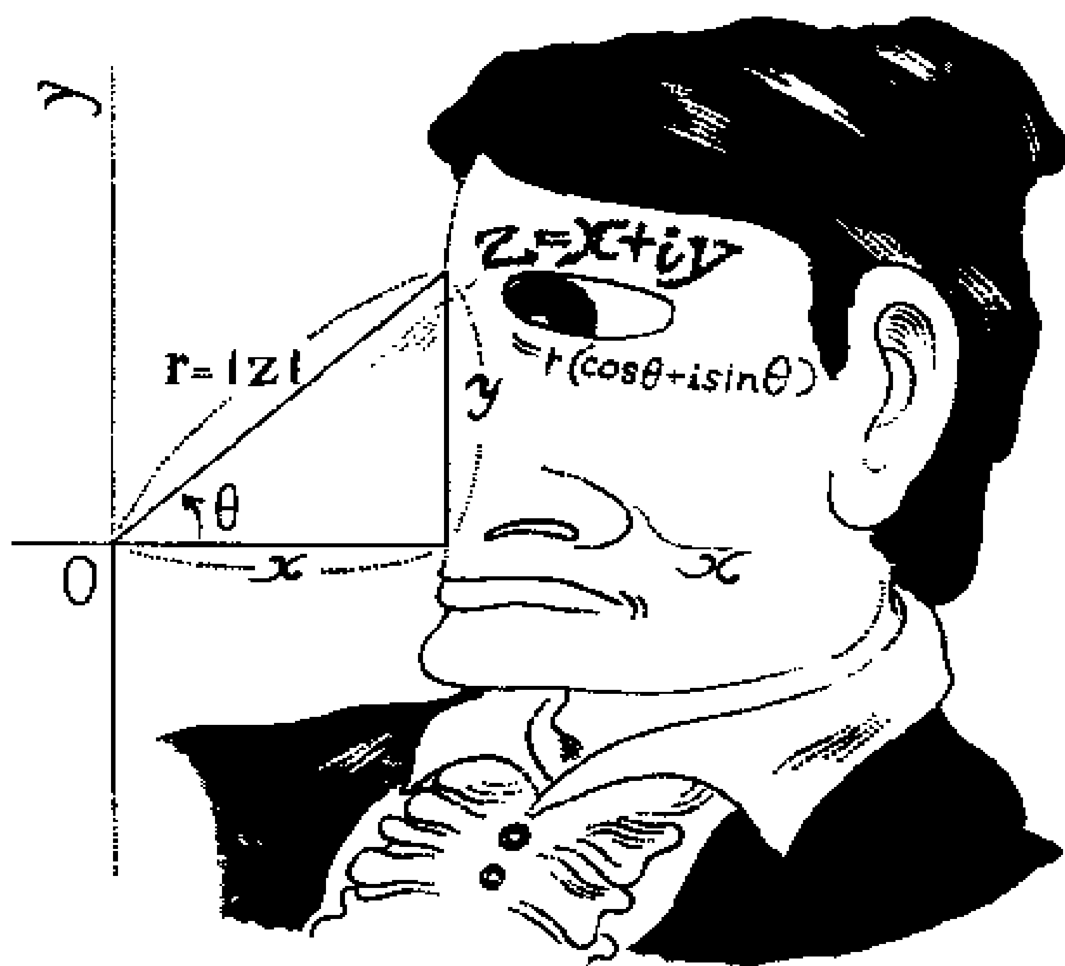
除高斯之外，莱布尼茨(Leibniz)、贝努利(Bernoulli)、欧拉(L. Euler)、德·莫依尔(A. de Moivre)等人对复数也有过各种研究。

创立复数平面、给复数相等下定义和进行复数运算这些却都是高斯的伟大功绩。

第4章

怎样在复数平面上表示复数

—— 复数和高斯平面 ——



§4.1 复数平面

如前所述，实数可在数轴上表示。还有，采用笛卡儿坐标（直角坐标），直线和曲线可以描绘为平面上动点(x,y)移动的轨迹。

这方面的内容与向量关系密切，将留在第8章详细讲述。

可是，含有纯虚数的一般复数没有实数部位，所以纯虚数不能在数轴上表示。但是，无论实数、纯虚数，甚至一般复数，全都能在复数平面或高斯平面上表示。

图4-1为复数平面或高斯平面。取横轴，即X轴

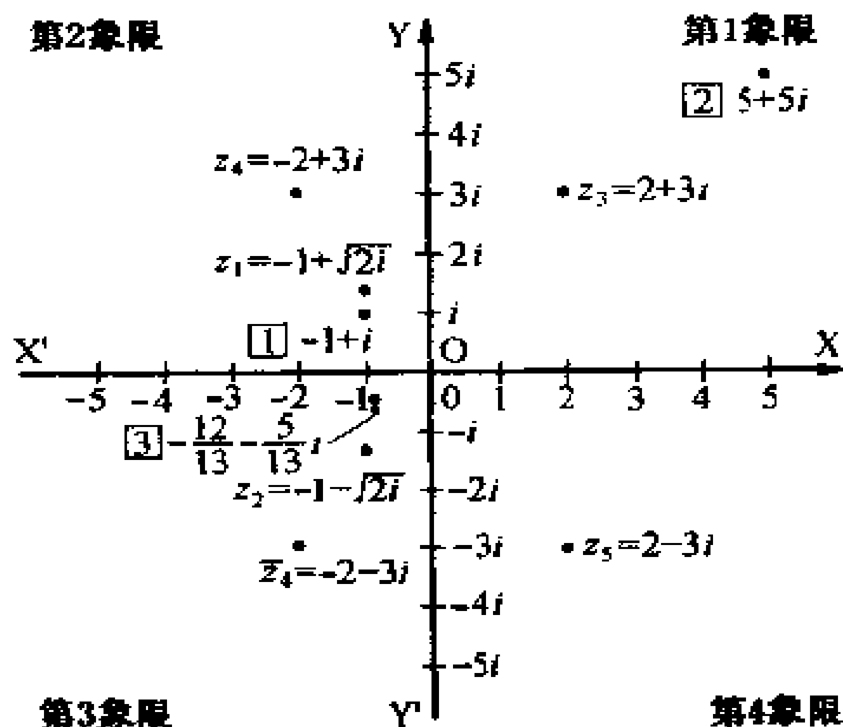


图4-1 复数平面上的复数以及虚数（纯虚数）

为实数轴；取纵轴，即Y轴为虚数（纯虚数）轴，从而复数$z=a+bi(a\neq0,b\neq0)$可座落在XY复数平面上。

实际上，横轴就是数轴。

第1象限是OX和OY之间的平面，第2象限是OY和OX'之间的平面，第3象限是OX'和OY'之间的平面，第4象限是OY'和OX之间的平面。

总之，复数平面上的象限，是由X轴的正方向向左，即逆时针，每旋转90°，分别为第1、第2、第3、第4象限。

复数平面的横轴X'OX叫做实轴或实数轴，并且与实数情况下的数轴一样，可以表示所有实数。

复数平面的纵轴YOY'叫做虚轴或虚数轴，并且可以表示全部虚数(纯虚数)。

因此，除了实数和虚数(纯虚数)之外，各象限内的点代表所有的复数。

这里，a，b 为实数，i 为虚数单位。当取 a，b 为正、0、负各种数值时，代表一切复数 $z = a + bi$ 的点均可以在此复数平面(高斯平面)上表示。

换句话说，复数平面上的所有点是与复数 $z = a + bi$(a，b 为实数，i 为虚数单位)一一对应的。

这也是虚数的七个奥秘之一。

虚数(想像中的数)作为实体，是可以在复数平面(高斯平面)上找到的。

下面对图4－1做如下说明：

[1] 代表点 $-1+i$，[2] 代表点 $5+5i$，[3] 代表点 $-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i$。

这样，前面二次方程 $x^2+2x+3=0$ 的解 $x_1 = -1+\sqrt{2}i$，$x_2 = -1-\sqrt{2}i$，在图4－1中用 z_1，z_2 表示。z_1 和 z_2 这两个数是共轭复数。显而易见，这两个点以实轴(X轴)为对称线互相对称。

还有，两个复数 $z_3=2+3i$，$z_4=-2+3i$ 是以虚轴（Y 轴）为对称线互相对称的两个点。

进一步，$z_3=2+3i$ 和 $z_5=2-3i$ 两个复数以实轴（X 轴）为对称线互为对称点，但 $z_4=-2+3i$ 和 $z_5=2-3i$是对称于原点 O 的点对称。

XOX'和 YOY'两条直线的交点和数轴上的原点 O 是相同的点。原点 O 取自英文 origin 的字头。

z_3 和 z_5 是共轭复数，但 z_3 和 z_4 却不然，尤其 z_4 和 z_5 都不是共轭复数。

通常把 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示。

使用这种表示方法，$z_4=-2+3i$ 的共轭复数则记为 $\bar{z}=-2-3i$。

也就是说，为了在复数平面上表示 z_4 的共轭复数 $\bar{z}_4$，应该在以实轴（X 轴）为对称线的位置上取点。因此，两个互为共轭的复数对称于 X 轴。

所以，代表共轭复数的两点位于第 1 和第 4 象限或第 2 和第 3 象限。

这里，须说明数的绝对值。

绝对值（absolute value，modulas）是去掉符号的数。也就是说，+2 的绝对值为 2，-3 的绝对值为 3。

因此，使用符号（||）后，一般书写为

$a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$，$a<0$ 时，则 $|a|=-a$

使用该符号后，确认 $|+2|=2$，$|-3|=3$。

下面考虑平方以及平方根的情况。对平方而言，可计算如下：

$$2^2=2\times 2=4, 0^2=0\times 0=0,$$
$$(-3)^2=(-3)(-3)=9$$

即无论是 $a>0, a=0, a<0$ 哪一种情况，通常写作 $a^2 \geqslant 0$。

再考虑平方根的情况。因为$\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3$，所以古代人认为根号$\sqrt{\quad}$内负的数，如$\sqrt{-4}$等，不存在是理所当然的。

可是，i 作为虚数单位之后，就可以这样来表示$\sqrt{\quad}$内负的数为$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$。

现在，明白了 $2i=\sqrt{-4}$，但带有负号的 $-2i$ 的意义又如何呢？

其意义如下。即 $-2i=-\sqrt{-4}$。

在考察平方以及平方根的关系之后，根号 4，即$\sqrt{4}=2$，只有一个为"2"的解，但 4 的平方根实际却有 $+2$和 -2 两个解。

将此解写作"2 和 -2"也行，但按规定最好写为 ± 2。

因此，$\sqrt{4}$只得 2，但 4 的平方根却有 2 和 -2 两个，这是它们之间重要的不同。

所以，当 $a \geqslant 0$ 时，虚数为 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$，还有 $-\sqrt{-a}=-\sqrt{a}i$。

将数值实际代入考虑过后，因为$\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$，$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$，所以$-\sqrt{-4}=-2i$，$-\sqrt{-3}=-\sqrt{3}i$

下面，再继续深入讨论一下。

解一次方程 $x-\sqrt{a}=0$ 后，得 $x=\sqrt{a}$，这是正确无误的解答。

但是，若将等号两端平方之后，又该如何呢？

因 $x^2=a$，所以 $x^2-a=0$。这里，左端可因式分

解为$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$，因而 x 值为$\sqrt{a}$及 $-\sqrt{a}$，共有两个。

像这样漫不经心地将两端平方，是不妥当的。

像 $-\sqrt{a}$这样可能由别处引进的解叫做额外解或额外根。

解方程式时必须注意，等式两端的平方会混入额外解。

解二次方程 $x^2-a=0$ 时，左端因式分解后，$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$。

因为 $x-\sqrt{a}=0, x+\sqrt{a}=0$，故所求之解为 $x=\sqrt{a}$和 $x=-\sqrt{a}$。

下面，因式分解二次方程 $x^2+4=0$。解此方程后，因为 $x^2-(-4)=0$，故 $x^2-(\sqrt{-4})^2=0$。

等号左端可因式分解为$(x-\sqrt{-4})(x+\sqrt{-4})=0$，因 $x-\sqrt{-4}=0, x+\sqrt{-4}=0$，故 $x=\sqrt{-4}=2i$ 以及 $x=-\sqrt{-4}=-2i$，按规定最好写作 $x=\pm 2i$。

下面，不采用因数分解方法解此方程，因 $x^2+4=0, x^2=-4$，据此 $x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$，所以其解仍然为 $x=\pm 2i$。

无论采用哪一种解题方法，其答案都相同，均为 $\pm 2i$。

最后，使用二次方程解的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

来求解 $x^2+4=0$。

在二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$中，当 $b=0$

时，因 $ax^2+c=0$，故 $x^2+\frac{c}{a}=0$。

所以，解的公式适用于 $x^2+4=0$，则

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{-16}}{2}=\pm\frac{4i}{2}=\pm2i$$

得出的答案与以上方法完全相同。

因此，$a\geqslant0$ 时，二次方程 $x^2+a=0$ 的解为 $x=\pm\sqrt{a}i$。

由于虚数单位 i 的发现，无限地拓宽了数的范围，从而促进了整个科学的进步发展。

尤其在电工学领域，虚数的发现使其受益非浅。

§4.2 共轭复数与 J. R. 阿尔冈图解的关系

前面已提到过共轭虚数，这里进一步讲讲共轭虚数与复数平面上点的关系。

首先，将复数 $a+bi$（a,b 为实数，i 为虚数单位）图解示于图 4-2 中。

此图解是阿尔冈提出来的，故称之为阿尔冈图解。

因为图 4-2(1) 中 $Oz^2=a^2+b^2$，故 $Oz|=\sqrt{a^2+b^2}$。此时，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，并称之为复数 z 的绝对值。

当 $z=4+3i$ 时，因为 $|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$，所以 $|z|=5$。这可由图 4-2(2)显而易见。

同理，$z' = -3-2i$ 的绝对值为

$$|z'| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2}$$
$$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}。$$

虽然前面已经讲过了，但这里再用图解详细说明共轭复数。

$z = a + bi$（a，b 为实数，i 为虚数单位）的共轭复数为 $\bar{z} = a - bi$（a，b 为实数，i 为虚数单位），并以实轴（也有人称之为实数轴）为对称线，z 和 z' 点互相对称，如图 4－2(3)中所示。

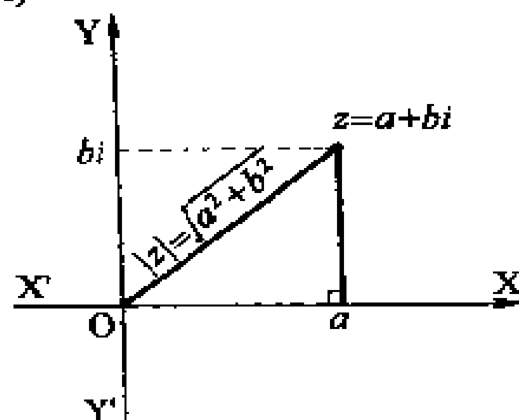
反之，当 $z' = a - bi$ 时，其共轭复数当然就是 $\bar{z}' = a + bi$。

下面举例说明共轭复数图形的意义。

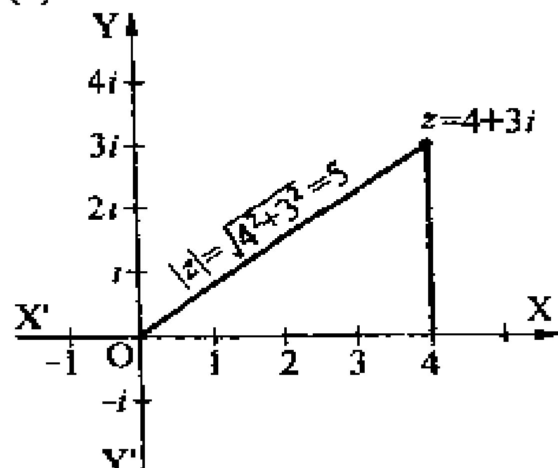
由图 4－3 可见，因为 $z_1 = 3+2i$，故 $\bar{z}_1 = 3-2i$，而 $z_2 = -2-3i$，故 $\bar{z}_2 = -2+3i$。

这样，在复数平面（高斯平面）上，相互共轭的一组复数是以 z_k，$\bar{z}_k$

(1)



(2)



(3)

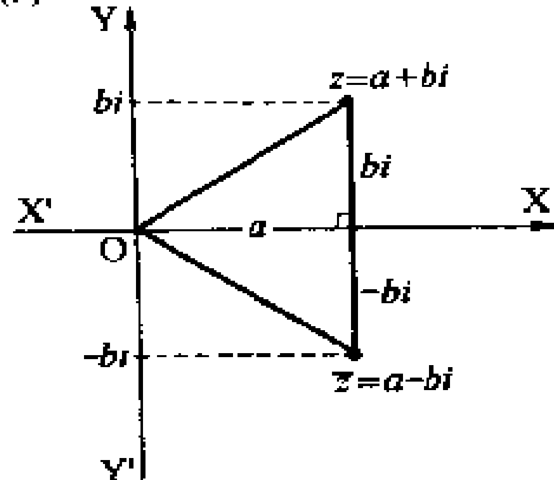


图 4－2　阿尔冈图解

代表它们点的位置，并且是以X'OX线为对称轴的一组对称点。

可是，如果使用高斯平面，利用作图法就可求得 z_1 和 z_2 两个复数的和、差、积与商。

有关这些内容，将在下节叙述。

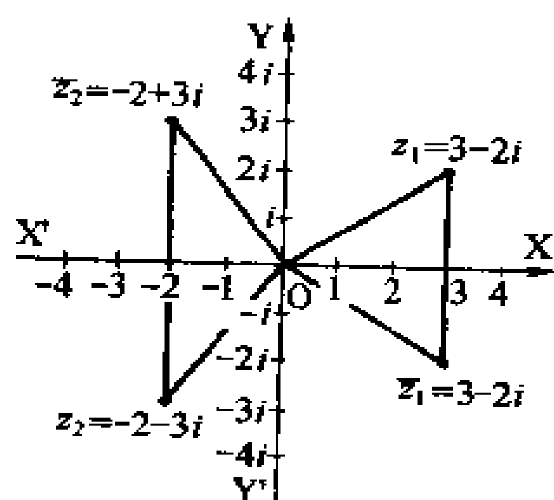


图 4-3

前面提到阿尔冈的名字，下面稍微介绍一下他的情况。

阿尔冈(J. R. Argand, 1768 ~ 1822)是瑞士数学家，其童年时代的成长经历不详。在他的研究工作中，现在评价最高的当属前面讲过的阿尔冈图解。

也就是说，在平面上用图解表示复数，并将此观点与几何学相结合，从而对复数研究做出了贡献。

这种图解是在 1806 年，阿尔冈 38 岁时提出的。

当时，数学家们并不很重视阿尔冈图解，但尔后高斯、柯西等大数学家发展了这种想法，不久便推进了复变函数的发展。

§4.3 高斯平面上的四则运算

首先，利用作图法来求两个复数 z_1, z_2 之和 $z_1 + z_2$。

当 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 时，$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$。

如图 4－4 所示，为了画出相邻边为 Oz_1，Oz_2 的平

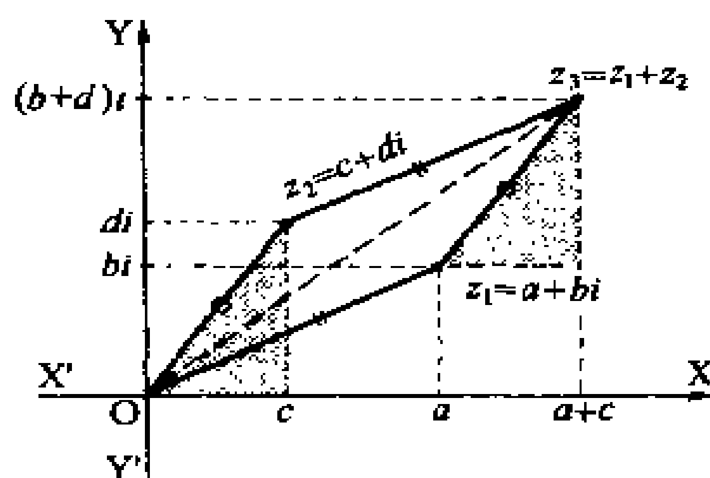


图 4－4

行四边形，先以 z_1 为起点作平行于 Oz_2，而长度等于 $|z_2|$ 的一段直线，若其线段终点为 z_3，则

$$z_3 = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

此时，四边形 $Oz_1z_3z_2$ 为平行四边形。

下面利用作图法求两个复数之差 $z_1 - z_2$。

当 $z_1 = a + bi$，$z_2 = c + di$ 时，$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$ 作图如图 4－5 中所示。

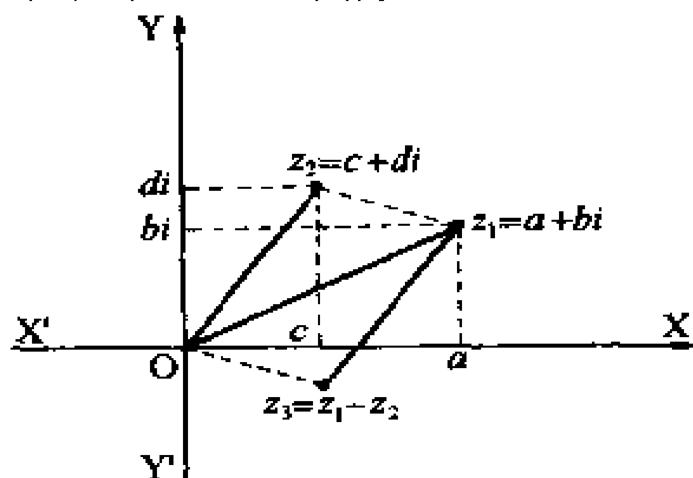


图 4－5

$|z_1|$ 即 $\sqrt{a^2+b^2}=\overline{Oz_1}$ 是平行四边形对角线，$|x_2|$ 即 $\overline{Oz_2}$ 是该平行四边形的一个边，若再求得另一边，问题就解决了。

以 z_1 为起点，作与 Oz_2 反向平行的平行线，取长度 $z_1z_3=\overline{Oz_2}$，其终点 z_3 所表示的复数即为 $z_3=z_1-z_2$。

也就是说，$z_3=z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$。

此时，四边形 $Oz_3z_1z_2$ 为平行四边形，而且 Oz_1 为其对角线。

第 3 个作图题是利用作图法求两个复数 z_1，z_2 的积 $z_1\cdot z_2$。已知 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，作图求作

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &=(a+bi)(c+di)\\
&=(ac-bd)\\
&\quad+(ad+bc)i
\end{aligned}
$$

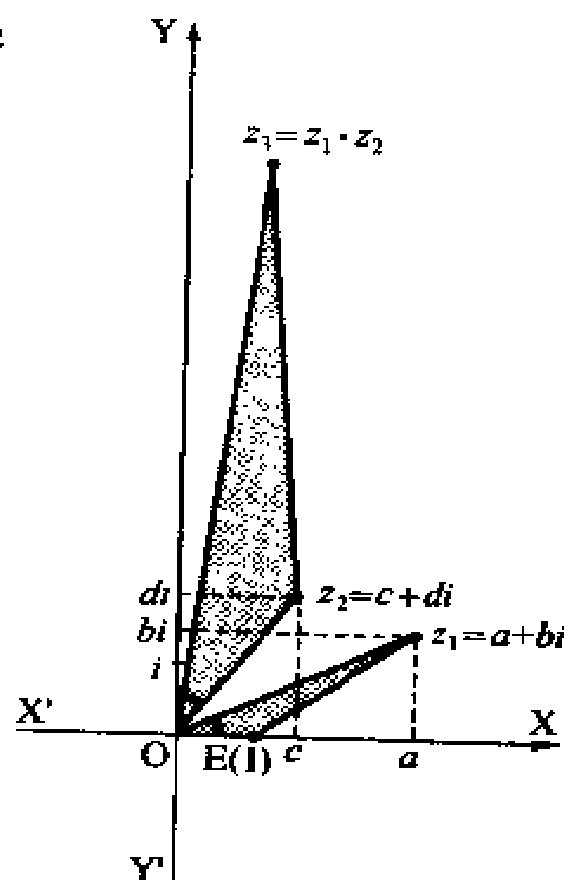


图 4－6

如图 4－6 所示，首先在实轴(X′OX)上取点 E，并令 $\overline{OE}=1$，通常用 E 表示，也有人用 I 表示。之后，作出两个相似三角形，$\triangle z_1OE\backsim\triangle z_3Oz_2$（$\backsim$ 为相似形符号），从而求得 z_3 点，z_3 点所表示的复数就是 $z_3=z_1\cdot z_2$。

作图顺序归纳如下：

(1) 作 $\triangle z_1OE$；

(2) 在 Oz_2 两端分别以 O，z_2 为顶点画出 $\angle z_2Oz_3=\angle z_1OE$ 及 $\angle Oz_2z_3=\angle OEz_1$，从而得出 Oz_3。

按相似三角形中的比例关系

$$\overline{Oz_1}:\overline{OE}=\overline{Oz_3}:\overline{Oz_2}$$

又 $\overline{OE}=1$，所以

$$\overline{Oz_1}:1=\overline{Oz_3}:\overline{Oz_2}$$

因此，

$$\overline{Oz_3}=\overline{Oz_1}\cdot\overline{Oz_2}$$

图 4-7

实际作图如图 4-7 所示，因 $Ez_1 /\!/ z_2z_3$，且 $OE=1$，所以 $\overline{Oz_3}=\overline{Oz_1}\cdot\overline{Oz_2}$，从而

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(a+bi)(c+di)\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

最后，利用作图法求两个复数 z_1、z_2（$z_2\neq 0$）的商 $\frac{z_1}{z_2}$。已知 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$（$z_2\neq 0$）两个复数，利用作图法求 $z_1\div z_2$。

如图 4-8 所示，首先在实轴（X'OX）上取单位长度点 E(1)，作 $\triangle z_2OE \backsim \triangle z_1Oz_3$，得点 z_3 后，则 $z_3=z_1\div z_2$（$z_2\neq 0$），

即 $z_3=\frac{z_1}{z_2}$（$z_2\neq 0$）

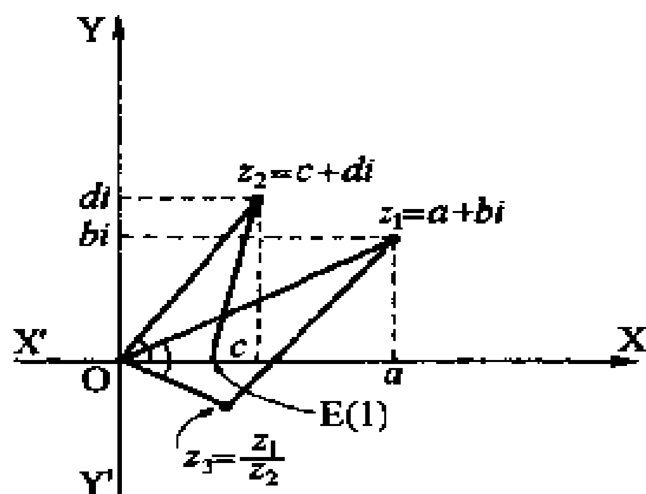


图 4-8

作图顺序：(1) 作

$\triangle z_2OE$;

(2)在 Oz_2 两端分别以 O, z_1 为顶点在 Oz_1 线段下方作出$\angle z_1Oz_3=\angle z_2OE$ 及$\angle Oz_1z_3=\angle Oz_2E$，从而得交点 z_3。

因$\triangle z_2OE \backsim \triangle z_1Oz_3$，所以$\overline{Oz_2}:\overline{OE}=\overline{Oz_1}:\overline{Oz_3}$，但是$\overline{OE}=1$，所以$\overline{Oz_3}=\dfrac{\overline{Oz_1}}{\overline{Oz_2}}$。

这样，$\overline{Oz_3}=|z_3|$，所以 $z_3=z_1\div z_2(z_2\neq 0)$成立。

可是，$z_1=a+bi, z_2=c+di(z_2\neq 0)$，所以

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}(c+di\neq 0)$$

分母实数化后，

$$z_3=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

从而作图得到 $z_3=z_1\div z_2$。

线段 Oz_3 的另一种作图法，如图 4-9 中所示。

图中 $z_2E /\!/ z_1z_3$，θ 角为任意角。$OE=1$

所以$\triangle z_2OE \backsim \triangle z_1Oz_3$

由 $OE:Oz_3=Oz_2:Oz_1$ 得

$$z_3=z_1\div z_2(z_2\neq 0)=\frac{z_1}{z_2}$$

即为所求。

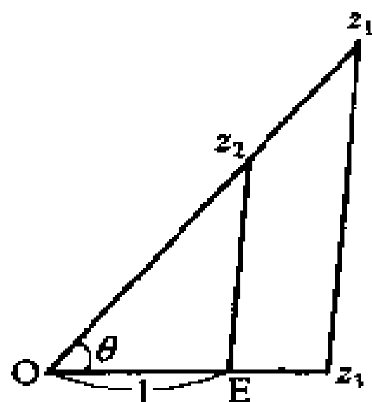


图 4-9 复数除法运算

至此，两个复数的四则运算，

$z_1+z_2, z_1-z_2, z_1\cdot z_2, \dfrac{z_1}{z_2}(z_2\neq 0)$

利用作图法全都得出来了。

或许你会感到这种作图求解复数的和、差、积、商很麻烦，但借助阿尔冈所提出的“阿尔冈图解”，可不必计算，就能非常简单地图解示出两个复数的四则运算结果。

这里仅将其简单的图解示出(见图 4-10)。大家只要仔细看过，相信都能充分理解此图的含义。

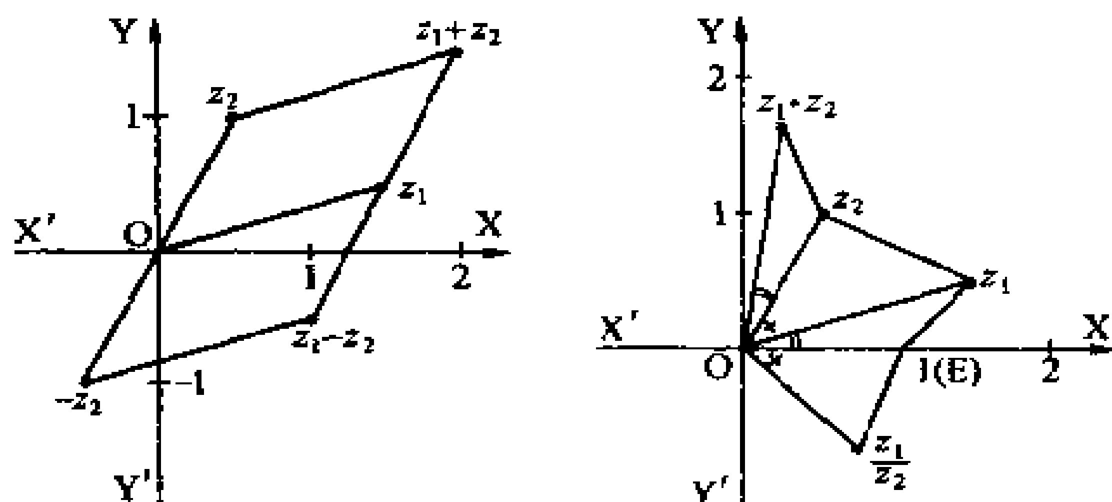


图 4-10 复数四则运算的阿尔冈图解

§4.4 利用直角三角形的边角关系表示复数

复数 $z=a+bi$ 在高斯平面上的表示，如图 4-11 所示，我们已经在前面叙述过了。

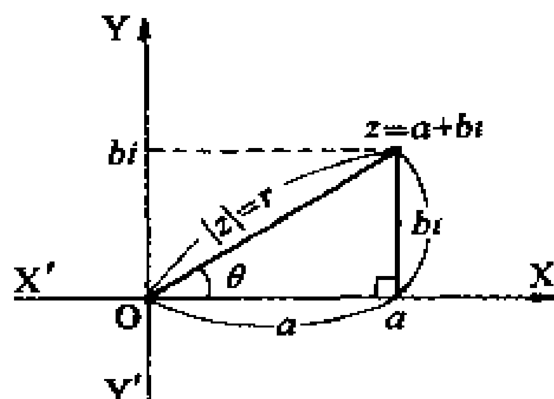


图 4-11

图中直角三角形斜边长度为 Oz。

可是，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 置换为 r 后，则 $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$。

这里，$\theta = \angle zOX$，并称为复数的幅角(argument)，采用它的英文缩写而记之为 $\arg z = \theta = \angle zOX$。

这样，使用绝对值 $|z| = r$，幅角 θ，则复数 $z = a + bi$ 可表达如下：

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

在叙述用三角函数表示复数之前，让我们稍微复习一下三角函数。

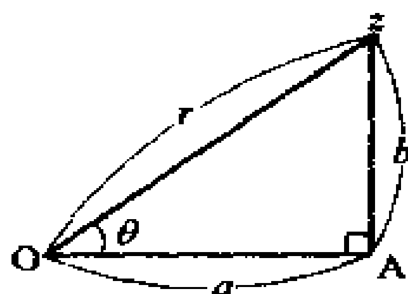


图 4－12

如图 4－12 中所示，在直角三角形中，直角的对边为斜边 $\overline{Oz} = r$，锐角 θ 的对边为 $\overline{Az} = b$，锐角 θ 的邻边为 $\overline{OA} = a$。a, b, r 各边长度两两之间的六个比值，称为 θ 角的六种边之比关系或三角函数，并分别定义表示如下。

$$\frac{b}{r} = \sin\theta, \frac{a}{r} = \cos\theta, \frac{b}{a} = \tan\theta,$$

$$\frac{a}{b} = \cot\theta, \frac{r}{a} = \sec\theta, \frac{r}{b} = \operatorname{cosec}\theta$$

上述三角函数，分别称为正弦(sin)θ、余弦(cos)θ、正切(tan)θ、余切(cot)θ、正割(sec)θ、余割(cosec)θ。

对直角三角形而言，已知其 1 个锐角 θ 之后，其另一锐角也就知道为 $90° - \theta$，并且该(直角)三角形的形状也就确定了。

对相似三角形而言，虽然三角形大小不同，但三个对应边之比却总是一定的。

因此，使用直角三角形的一个锐角，可以表示相邻两边之比。直角三角形的 a, b, r 三个边之间，全部共

有六种边比关系，但通常只要知道其中 $\sin\theta=\frac{b}{r}$，$\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\tan\theta=\frac{b}{a}$ 3个边比关系就足够了。因为 $\cot\theta$ 是 $\tan\theta$ 的倒数，$\sec\theta$ 是 $\cos\theta$ 倒数，$\operatorname{cosec}\theta$ 是 $\sin\theta$ 的倒数。

现在，再回头来看为什么 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$？

由图4-12可知，$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{Az}}}{\overline{\mathrm{Oz}}}=\frac{b}{r}$，所以 $b=r\sin\theta$，$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{Oz}}}=\frac{a}{r}$，所以 $a=r\cos\theta$。

如果对上列两个关系式仍不很理解，则对 $a+bi=r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)$ 应该能够明白。

所以，$z=a+bi=r\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}i\right)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

也就是说，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

复数的这种表达方法，称为复数的极形式或复数的极坐标表示[*]。这是数学特有的复杂语言。

下面稍离正题，顺便说说复数在电工学领域中的表达。在数学中规定，复数 $z=a+bi$，但在电工学领域已习惯用 i 符号表示电流。因此在处理电工学的复数问题时改用 j 来代替 i 符号，将 bi 改写为 jb，并且使用 $z=a+jb$。

可是，在 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 中，i 必须放在 $\sin\theta$ 的前面，所以 i 和 j 符号的书写不同是因为使用复数领

[*] 中文也可译为“复数的极坐标式”。——译者注

域不同。而 i 和 j 的位置(bi 和 jb)不同则是人们的习惯，并且无论在数学还是电工学领域，bi 和 jb 同样都表示复数。

§4.5 复数变化的表达方法
——极坐标方程

直角三角形的那些边角关系可延伸为三角函数，利用图 4－13 可进一步了解三角函数。

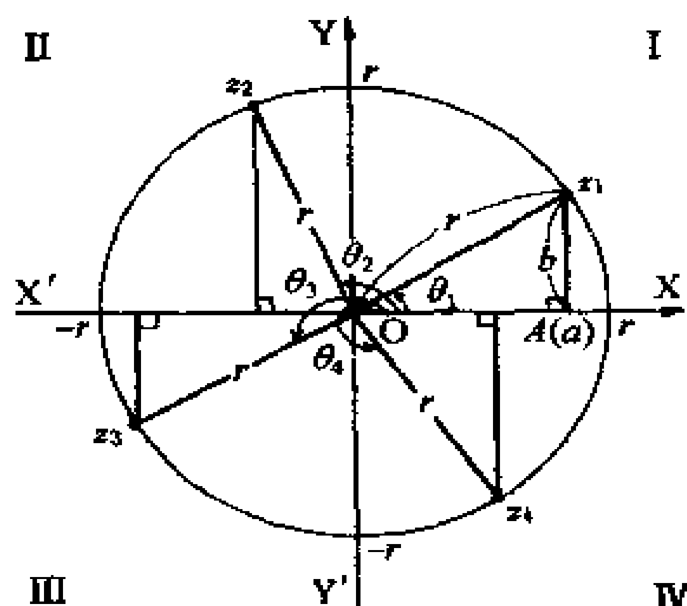


图 4－13

如前所述，原点 O、横轴(X 轴)、纵轴(Y 轴)保持原样，但在复数平面上，X 轴称为实轴，Y 轴称为虚轴，原点 O 称为极点。

前面提到的那些边角关系，通常只涉及第 1 象限，但复数存在于第 1 象限至第 4 象限的整个复数平面。

也就是说，复数 $z = a + bi$ 中的 a、b 可取为正、0、负等各种数值，所以必须引入对应于该场合的"一般

角"。

因此,一般角的三角函数也要有一些约束规定。

首先,规定 z 的绝对值 $|z|=r$ 不等于 0,而且要求 $r\geq0$。

当然,a 在极点 O 的右端为正,左端为负;b 在极点 O 上端为正,下端为负。

根据三角函数性质,要求 $-\infty<\theta<+\infty$,即 θ 角的变化范围在正、负无穷大之间。

也有人认为,复数辐角的变化范围在 $-180°$ 至 $+180°$ 之间,但这里规定复数辐角 θ 由 0°逆时针转 1 周为 360°。

因为 r,a,b 的符号已确定为正值,所以各象限中正弦、余弦、正切的符号列于下表中。

函数 / 象限	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	+	-	-
Ⅲ	-	-	+
Ⅳ	-	+	-

这样,当 $\theta=45°$ 时,复数 z_1 可用极坐标形式表示如下:

$$z_1=a+bi=1+i$$

$$=\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)$$

$$\left(\cos45°=\sin45°=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

图 4-14 中示出,复数 z_1 在第 1 象限的情况。

在第 2 象限情况下,$\theta=120°$ 时,由图 4-15 可知复

数 z_2 的极坐标形式为

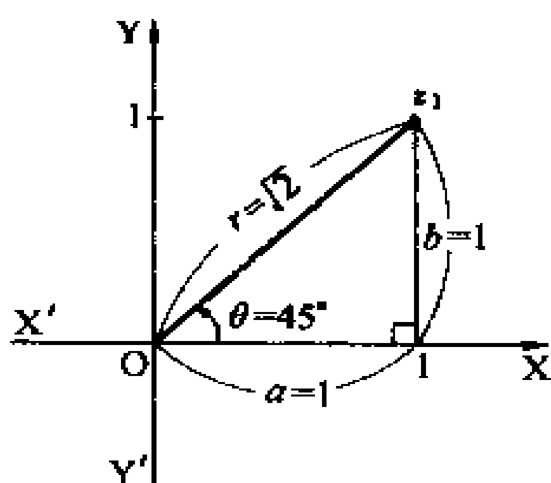


图 4－14

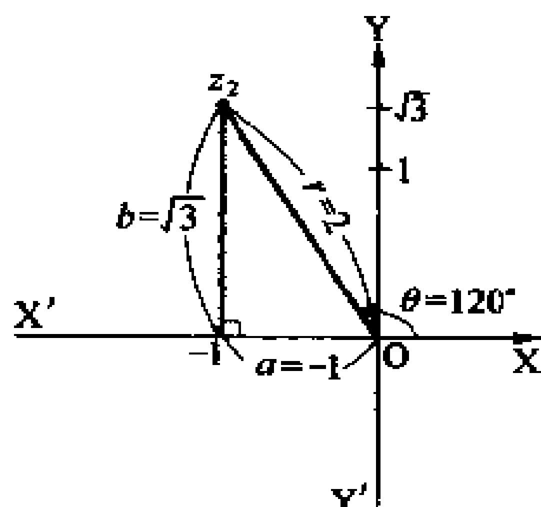


图 4－15

$$z_2=a+bi=-1+\sqrt{3}i$$
$$=2(\cos120°+i\sin120°)$$
$$\left(\cos120°=-\frac{1}{2},\sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

继之，在第 3 象限情况下 $\theta=210°$时，由图 4－16 可知，复数 z_3 的极坐标形式为

$$z_3=a+bi=-\sqrt{3}-i$$
$$=2(\cos210°+i\sin210°)$$
$$\left(\cos210°=-\frac{\sqrt{3}}{2},\sin210°=-\frac{1}{2}\right)$$

最后，在第 4 象限情况下 $\theta=300°$时，由图 4－17 可知复数 z_4 的极坐标形式为

$$z_4=a+bi=1-\sqrt{3}i$$
$$=2(\cos300°+i\sin300°)$$
$$\left(\cos300°=\frac{1}{2},\sin300°=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

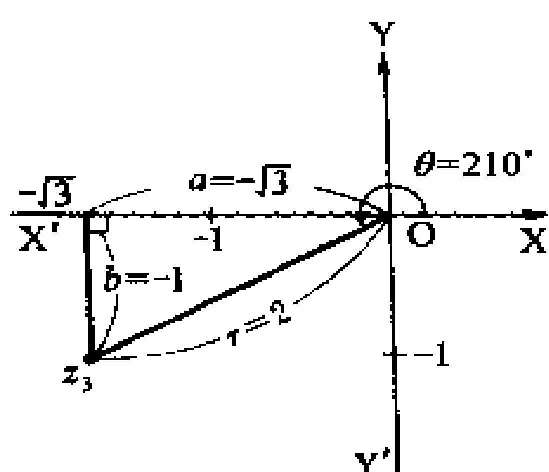


图 4-16

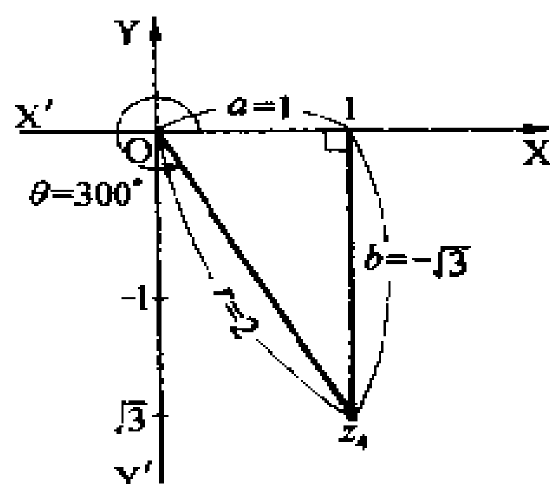


图 4-17

这样，因为 $z=a+bi$，所以 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 就表达了复数变化的情况。如前所述，这种表达方法称为复数极坐标形式(polar form)，原点称为极点(pole)。

可是，画出半直线 OX，并用 r 和 θ 表示 p 的位置时，则称为极坐标(polar coordinates)，并记为 p(r,θ)。有关极坐标的情况，后面还有叙述。

这样，用 r 和 θ 表达后，复数 z 就一目了然(很清楚)了。

然而，由 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 怎样还原为 $z=a+bi$ 呢？这里取图 4-14 中第 1 象限的 z_1 举列说明如下。

$$z_1=\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)$$

将 $\cos45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 代入上式后，得

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+i$$

同理，第 2 象限的 z_2，第 3 象限的 z_3，第 4 象限的 z_4 也都能简单地计算出来。

§4.6 零(0)及虚数极坐标形式的表示方法

因为 $z=0+0i$，所以实数 0 情况下，$|z|=0$，并且规定幅角是任意的。

如果一定要用极坐标形式表示的话，因 $|z|=0$，幅角为 0°，则 0 的极坐标形式可记为

$$z=0+0i=0\times(\cos0°+i\sin0°)$$
$$=0\times(1+0i)=0$$

0 的极坐标形式是 $0\times(\cos0°+i\sin0°)$，而这是一个徒劳无益的实验。

可是，特殊复数(实数、虚数)的极坐标形式又该如何呢？

先来看看实数 $a(a>0)$的极坐标形式。如果令 a 为 z_1，$|z_1|=r=a$，则

$$z_1=a+0i=a(\cos0°+i\sin0°)$$
$$=a(1+0i)=a$$

还有，实数为 $-a(a>0)$时，如果令 $-a$ 为 z_2，$|z_2|=r=a$，则

$$z_2=-a+0i$$
$$=a(\cos180°+i\sin180°)$$
$$=a(-1+0i)=-a$$

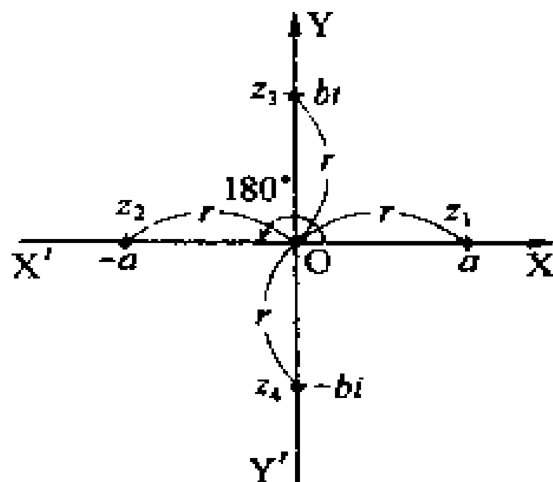


图 4－18

接着，再来看看虚数(纯虚数)的极坐标形式。如果令虚数 $bi(b>0)$为 z_3，$|z_3|=r=b$，则

$$z_3 = 0 + bi = b(\cos 90° + i\sin 90°)$$
$$= b(0 + i) = bi$$

同理，虚数 $-bi(b>0)$ 也一样，如果令 $-bi$ 为 z_4，$|z_4| = r = b$，则

$$z_4 = 0 - bi = b(\cos 270° + i\sin 270°)$$
$$= b\{0 + i \times (-1)\} = -bi$$

由以上可见，实数 a，$-a(a>0)$，虚数（纯虚数）bi，$-bi(b>0)$ 采用极形式表示后，其结果分别为 a，$-a$，bi，$-bi$ 是合理的。

§4.7　60 进制和弧度制的关系

计量角度，一般多采用以度、分、秒为单位的 60 进制，但也有用弧度为单位计量的弧度制（method of radian）。对此，下面略作简单说明。

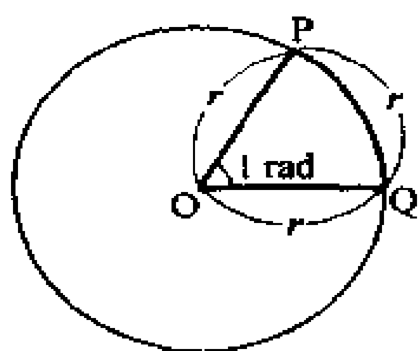


图 4－19

如图 4－19 所示，在半径为 r 的圆周上，取长度为 r 的圆弧 $\overset{\frown}{PQ}$，其所对应的圆心角为 1 个弧度单位（rad），通常将 rad 省略而称其大小为 1。这种测量圆心角张开大小的方法，称为弧度制。

计算角度大小，通常多采用 60 进制，但在理论分析时，使用弧度制既方便又简单。

下面，先来说明单位弧度角（rad）有多大。

由图 4－19 可见，单位圆心角形状类似正三角形的一个角，因而可推测该角略小于 60°，约为 57 度17 分

44.8 秒(57°17′44.8″)。

可是，圆弧$\overset{\frown}{PQ}$长与其所对应的圆心角∠POQ 成正比关系。

所以，如果$\overset{\frown}{PQ}$增大 2 倍，3 倍，…n 倍，则圆心角∠POQ 也相应增大 2 倍，3 倍，…n 倍。

因此，用 π 表示圆周率之后，则半径 r 的圆周长为 $2\pi r$。

也就是说，圆周与直径的比值为圆周率 π。

可是，60 进制的角旋转一周为 360°，因此

$$r : 2\pi r = 1 \text{ 弧度(rad)} : 360°$$

即 $1:2\pi = 1$ 弧度(rad):360°

所以 π 弧度(rad) = 180°或 180° = π 弧度(rad)。

一般情况下，都将单位弧度(rad)省略，而简单表示为 180° = π。

这样，π 除了代表圆的周长与直径之比的圆周率外，π 还等于 60 进制中的 180°角。

在实际应用中，π 的近似值当然可取为$\frac{22}{7}$或 3.1416，而弧度制的 π(角)也近似为$\frac{22}{7}$弧度或 3.1416 弧度。

这样，可将 0°～360°之间经常使用的角度，采用 60 进制和弧度制对照表达如下表。

60 进制	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

由此表可知，$30°=\frac{\pi}{6}$，$45°=\frac{\pi}{4}$，$60°=\frac{\pi}{3}$，$90°=\frac{\pi}{2}$，…，$270°=\frac{3}{2}\pi$，$360°=2\pi$。当然，$180°=\pi$。

§4.8 关于圆周率 π

实际上，π 也用来表示半径为 1 的圆面积。π 也许是我们所接触到的数中最闻名的数。

在德国，圆周率叫做鲁道夫数，这是取自英文 Ludolph number 和德文 Ludolphsche Zahl 的拼音。

荷兰人鲁道夫（C. Van Ludolph，1540～1610）首先启用圆周率这个名称，在他临终前已将圆周率近似值精确计算到小数点后第 35 位数。

虽然圆的大小各有不同，但圆周长和直径之比为定值，这是很早以前人们就知道的。

因此，圆周长与直径之比叫做圆周率，其最初的含义是周边，在 1743 年瑞士数学家欧拉开始使用圆周率的符号是 p。

现在，世界各地采用的圆周率符号为 π，这是来自于“周边”一词希腊语字头的大写字母 Π。

1742 年前后，已有数学家采用 π 为圆周率符号，但 1748 年，欧拉在他的名著《解析学》一书中不再用 p 而开始改用 π 为圆周率符号，从此大家都使用 π 了。

关于欧拉的身世，请参阅第 7 章中的叙述。

在使用汉字的中国和日本，最初当然没有 π 这种符号，并且只有圆周率、密率等名称。

如前所述，圆周率 π 是无限小数，并且是一个无

理数。

古时 π 值取作$\frac{22}{7}$。当然，$\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}$是有理数中的循环小数。$\pi\doteq3.141592$ 可精确到小数点后的 6 位数，它与$\frac{22}{7}$相差 0.0013。此值的误差低于$\frac{1}{500}$。可以说古代所采用的 π 值相当精确。

另外，与 $\pi\doteq3.141592$ 比较，使用 π 近似值 3.1416 的误差为十万分之一。

这样，使用$\frac{22}{7}$的误差只能达到小数点后的 2 位数，而 $\pi=3.1416$ 可精确到小数点后第 3 位数。

关于 π 近似值情况，这里应该特别指出最早是中国数学家祖冲之(430～501)开始取密率，即圆周率为$\frac{22}{7}$，后来天文学家何承天也使用此值，其后是日本算学家关孝和(1642～1708)也取$\frac{22}{7}$为圆周率(也叫密率)。

除此之外，π 的近似值还有$\frac{223}{71}$，$\frac{333}{106}$，$\frac{355}{113}$，$\frac{377}{120}$等等。

有关圆周率的情况，请大家参阅作者在生活与科学文库中《π 的奥秘》一书的详细介绍。

§4.9 采用弧度制的复数极坐标形式

采用弧度制表示复数 $a+bi$ 的极坐标形式时，例如 $z_1=1+i$，则

$$z_1=1+i=\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

同理，

$$z_2=-1+\sqrt{3}i=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$

$$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

还有，

$$z_3=-\sqrt{3}-i=2(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)$$

$$=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

因为动径的位置相同，则也可用极坐标形式表示如下：

$$z_3=2\left\{\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

最后，

$$z_4=1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

或者

$$z_4=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

也可以。

那么，如果复数

$$z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

时，

在 $r\geqslant 0$ 条件下，必须要有

$$z=3\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)。$$

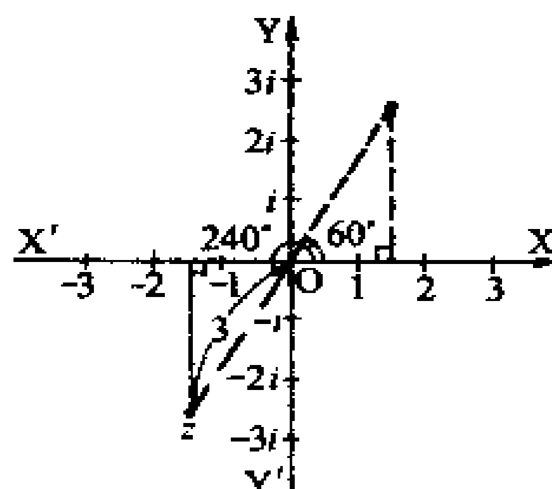


图 4－20

因此，由图 4 - 20 可清楚地看出来。

下面就来确认此计算结果是否正确。

因为

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \cos 240° = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以

$$z = 3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

确实为图 4 - 19 中所示。

有关这种计算，也可考虑如下：

$$z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

此复数 z 肯定位于第 3 象限。

因为复数 z 的绝对值 $|z|$ 为 r，所以只要求 r 为正值或等于 0。

§ 4.10 复数 z_1，z_2 的和与差的极坐标形式

这里，已知 2 个复数 z_1，z_2 的极坐标形式。

如果 $z_1 = a + bi$，$z_2 = c + di$，则可求得 $z_1 + z_2$ 和 $z_1 - z_2$，尔后再将计算结果还原为极坐标形式，这样就

可得出以下复数极坐标形式。

$$z_1 + z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_1 - z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

还有，与三角形的边角比一样，Oz 称之为动径(radius)。

例题 已知 $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$，计算 $z_1 + z_2$，$z_1 - z_2$ 之值。

解

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

所以

$$z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{3}i + \sqrt{3} + i = (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 1)i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3} - i = (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i$$

因此，令 $z_1 + z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，则

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 + 3 + 2\sqrt{3} + 1} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2(4 + 2\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

即 $r_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}$，故

$$\cos\theta_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{6}}{6-2}$$

$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

即 $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

即 $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

因此，$r_1=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$\theta_1=45°=\frac{\pi}{4}$

所以 $z_1+z_2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

同理，令 $z_1-z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，

$$r_2=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2(4-2\sqrt{3})}=\sqrt{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

即 $r_2=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，所以

$$\cos\theta_2=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{18}-\sqrt{6}}{6-2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{18}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{4}=-\frac{2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2}$$

$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，$r_2=\sqrt{6}-\sqrt{2},\theta_2=135°=\frac{3}{4}\pi$

所以，$z_1-z_2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

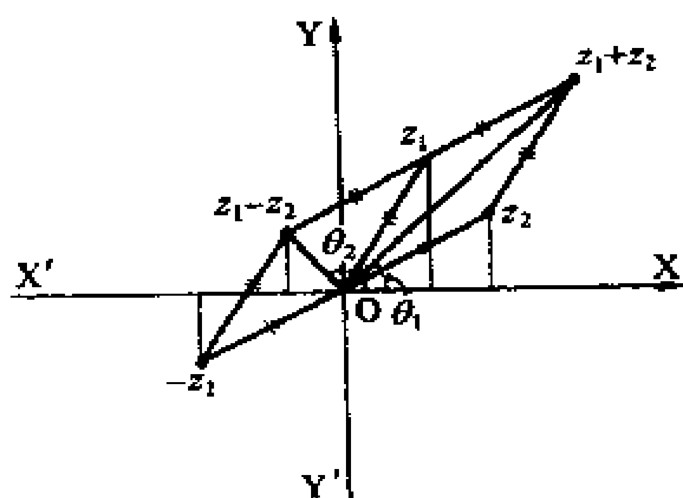


图 4－21

这样计算起来确实有点麻烦，但若利用图 4－21 就可简单地得出答案。

应当指出，在计算此解的过程中，$\sqrt{8\pm4\sqrt{3}}=\sqrt{2}\sqrt{(4\pm2\sqrt{3})}$ 的计算结果为 $\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1$，这里利用了等式

$$\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$

左端平方 $=(a+b)\pm2\sqrt{ab}$

右端平方 $=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\pm2\sqrt{ab}$

$=(a+b)\pm2\sqrt{ab}$

因此，$\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1$ 是因两数之积为 1，两数之和为 2，而求得两数分别为 3 和 1。

在$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$中，要求 $a>b$。

§4.11 复数 z_1, z_2 积与商的极坐标形式

极坐标形式可用来计算复数的积和商，利用三角学的加法定理，会使计算变得非常方便。

首先，$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，所以，

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&= r_1\cdot r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&= r_1\cdot r_2\cdot(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2\\
&\quad +i\sin\theta_1\cos\theta_2+i^2\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2)\\
&= r_1\cdot r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&\quad +(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)i\}\\
&= r_1\cdot r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

若令 $z=z_1\cdot z_2$，则 $|z|=r=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|$

$$\arg z=\theta=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$$

所以 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

据此得知，绝对值 $|z|$ 为 z_1, z_2 绝对值之积，而幅角 $\arg z$ 为 z_1, z_2 幅角之和。

在以上计算过程中，曾经利用过以下两个加法定理，即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

下面计算复数除法 $z_1 \div z_2$ 的商($z_2 \neq 0$)。

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$z_1 \div z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-i\cos\theta_1\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2-i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2-i^2\sin^2\theta_2}$$

上式分母为 $r_2(\cos^2\theta_2-i^2\sin^2\theta_2)$,而分子中,除 r_1 外为

$$(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,所以分母为 r_2。

又因为

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

故 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

令 $\frac{z_1}{z_2}=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

则

$$|z|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg z=\theta=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2$$

也就是说,可以简单计算两个复数的商,其商的绝对值为两个绝对值之商,其幅角为两个幅角之差。

下面举例计算复数极坐标形式的乘法及除法。

例题 当 $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$，计算 $z_1\cdot z_2$ 及 $z_1\div z_2$ 的极坐标形式。

解 将已知数值代入公式

$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$，

则

$$z_1\cdot z_2=2\times 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

同理，将已知数值代入

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\},$$

则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

这里，$|z_1\div z_2|=1$，$\arg(z_1\div z_2)=\frac{\pi}{6}$。

图 4－22 中示出 $z_1, z_2, z_1\cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$ 的图解，其中，$z_1\cdot z_2=4i$，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$。

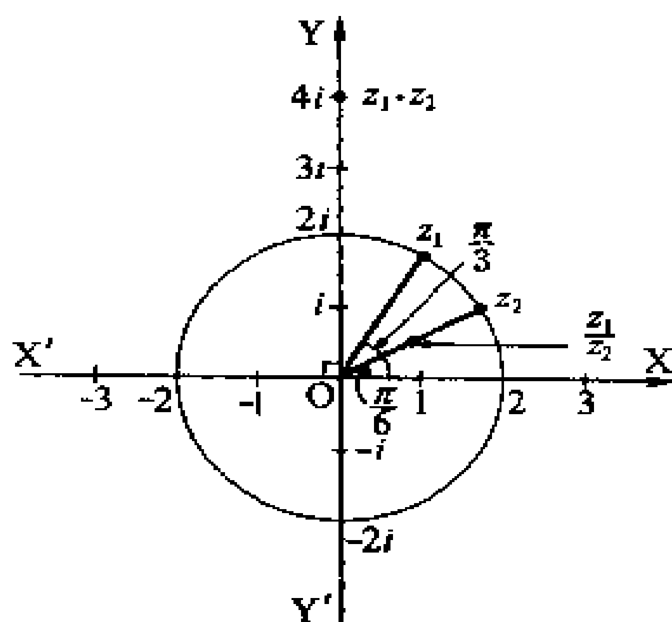


图 4－22

§4.12 弧度制的 π 与三角函数曲线

下面，让我们来看一下，使用弧度制的 π 进行计算有多方便。

三角函数（trigonometric function）的正弦值可图示为正弦曲线。

表示这种函数值的点是以 2π（360°）为周期的连续平滑波形曲线。

如果横轴（x 轴）为角 θ，纵轴（y 轴）为 $\sin\theta$（正弦）值，则可描绘出漂亮的图形曲线，如图 4－23 所示。此图形就是经常所见到的正弦曲线。

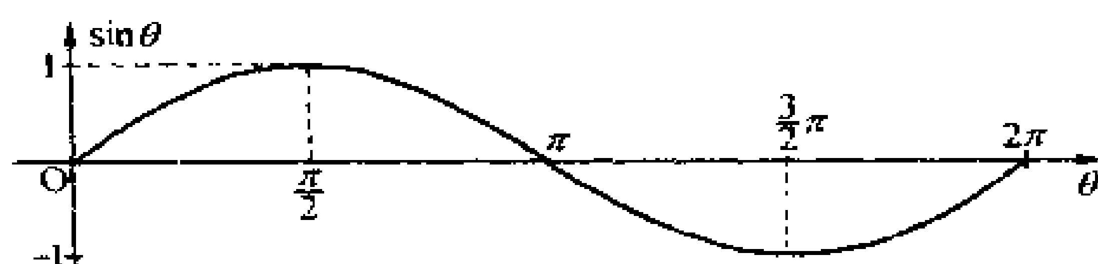


图 4－23　正弦曲线

当然，横轴上 π 的长度取其近似值 3.14 为好。

这样，此图为正弦曲线的正确图形，而且是只描绘出 0～2π 之间，即 0°～360°之间的正弦曲线。

实际上，横轴上角 θ 的变化范围是 $-\infty<\theta<+\infty$。

但是，以 2π（360°）为周期重复同一图形，可以在最小变化范围内得知曲线特征。

另外，正弦值的变化范围是 －1 与 ＋1 之间，所以 $\sin\theta$ 值的变化为 $[-1,1]$，并可书写为 $-1\leqslant\sin\theta\leqslant1$。

这也是正弦曲线的重要性质。

§4.13 古人有关 π 值的计算

下面介绍一下古时候人们是怎样计算圆周率 π 近似值的。

首先，从圆的内接正多边(角)形和圆的外切正多边(角)形开始。

所有顶点全部位于同一圆周上的正多边(角)形，叫做内接多边(角)形，例如内接正方形和内接正六角形。

各边都跟同一个圆相切的正多边(角)形，叫做这个圆的外切正多边(角)形，例如外切正方形和外切正六角形。

图 4-24 分别示出正方形和正六边(角)形的内接圆和外切圆图形。

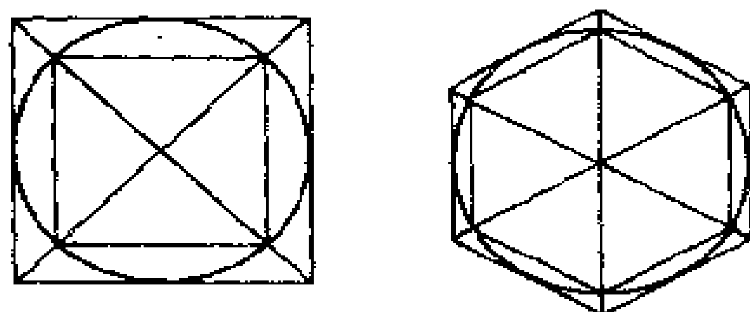


图 4-24 内接和外切正方形和正六边(角)形

因为正多边形周边长接近其内接或外切圆的周长，远古时代人们就开始采用这种办法来计算圆周率 π 的近似值。而且，这种内接或外切正多边形的边数越多，其周边长越接近该圆周长，从而所求 π 值精确度也越高。

例如，计算内接正六边(角)形时，逐渐增大边数，使正六边形变为正12边形、正24边形、正48边形……计算外切正方形时，逐渐增大边数为正8边形、正16边形、正32边形……并分别计算各自的周边总长，内接正多边形周长略小于圆周长度，而外切正多边形周长略大于圆周长度。

所以，古代数学家不断进行以上计算，试图得到更精确的 π 近似值。

为计算 π 的近似值，他们之中曾有人奉献终生。

还有，计算时所使用的正多边形边数，也因人而异。

德语中，π 称为鲁道夫数，由此而闻名的荷兰数学家鲁道夫(Ludolf van Ceulen，1540 - 1610)在1596年就将 π 的近似值计算到小数点后第20位。

到1610年他死前，鲁道夫已将正多边形边数增至 2^{62}(2的62次方)，也就是说计算到正多边形边数为 2^{62} 的周长，从而 π 的精确程度已达小数点后第35位数。

那么，2^{62} 多边形实际有多大呢？马上很难说清楚。

这里稍离正题，对此略加估算如下。

高中数学教科书末尾列有4位对数表，利用此表可计算 2^{62} 如下。

令 $x = 2^{62}$，两端取对数后，

$$\log x = 62\log 2$$

查对数表可知，$\log 2 = 0.3010$，所以

$$\log x = 62 \times 0.3010 = 18.6620$$

这里，0.6620为对数的定值部，18为该对数的定位部，据此可知这是个19位的数。

这里，反过来先查对数表中 0.6620 的真数，则

$$0.6620 \doteq \log 4.59$$

也就是说，$x = 4.59 \times 10^{18} = 459 \times 10^{16}$

这样，x 是 459 后有 16 个 0 的数，即

$$x = 4,590,000,000,000,000,000$$

在日本数字位数有一、十、百、千、万、亿、兆、京……而日本的数字表示法为从右起每 4 位加一逗号“,”分别为万、亿、兆、京。$x = 459,0000,0000,0000,0000$

这样，所求多边形的边数 x 为 459 京个边的庞大正多边形。

也就是说，以 1 兆的 1 万倍为 1 京单位，这是一个约有 460 京个边的正多边形。

在 17 世纪所发现的 π 的各种展开式是展开无穷级数的计算结果。这些应归功于牛顿和莱布尼茨所发现的微积分。

这里将 π 的展开式之一介绍如下。

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

此式是格里高利(James Gregory, 1638 ~ 1675)在年仅 33 岁时发现的。

格里高利展开式是分子为 1，分母为奇数，且正(+)、负(-)项交替出现的无穷分式数列。

因为 $\frac{\pi}{4}$ 是正切 $\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^\circ = 1$ 的反正切函数，所以此值来自 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$。

在此之后，很多数学家采用各种 π 的展开式，从而使 π 近似值的精确度不断提高。

电脑的出现已经使 π 的精确值达到小数点后几

亿位了。

利用电脑计算 π 近似值的一些情况，在第1章中已有介绍。

自古以来，很多人一直从不同角度提出 π 近似值的各种计算方法，其中也包括发现万有引力的著名大科学家牛顿。牛顿展开式为：

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots$$

根据这个展开式，π 近似值的计算结果可达到小数点后第14位数。

也就是说，$\pi \doteq 3.14159265358897$。

在1706年，马庭(1681～1751)已将 π 近似值计算到小数点后的100位数。

马庭所使用的计算公式如下：

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right\}-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right\}$$

再以后于1873年，尚克斯(1812～1882)使用马庭公式将 π 的近似值计算到小数点后707位数。

可是，后来经计算机验证指出，尚克斯计算的结果有错误，只有527位数是准确的。

1950年，美国人已将 π 的近似值计算到小数点后2035位数。

当然，此计算结果使用的依然是马庭公式。

此后，由于电脑的高速发展，圆周率 π 近似值的精确度很快就突破2亿位数大关。

1989年6月，美国哥仑比亚大学的一个研究小组已将 π 近似值精确计算到小数点后的4亿8000万位以上。

不久前又有消息传来，同年8月美国同一所大学的两位数学家甚至已经计算出 π 近似值精确度高达10亿1119万6691位数。

这是否是 π 近似值不可克服的极限呢？日本东京大学的金田先生对此持怀疑态度，而且此后不到3个月，于同年11月19日金田先生已将 π 近似值的精确度计算到小数点后10亿7374万位数。此次计算结果比他本人以前发表的记录提高2倍。

估计今后 π 近似值的精确度可达15～20亿位数。

圆周率精确值的计算被认为是检查电脑性能和程序的最佳措施之一。

现在，著作权属于美国的 π 值计算公式，传说正是使用随机数表计算出来的。与此相反，还有另一种说法，π 的数字序列也可以用来制作随机数表。

总之，利用 π 近似值展开式最高只能精确到数千位，精确度大于10亿位的 π 值就得采用其他方法计算了。

金田先生所使用的计算公式，据说也不完全是高斯·勒让德(算术几何平均法)公式。

§4.14 江户时期的日本数学家和 π 的计算

关于 π 的展开式，日本江户时期的数学家们进行

过研究，这里用现在的表达形式介绍如下。

建部贤弘(1664～1739)利用下式曾经计算了 π 的近似值。但在平山博士的书中却说是松永良弼计算的。

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1^2}{3\cdot4} + \frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \cdots$$

松永良弼(1692 年前后～1744)使用下式计算过 π 近似值

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1^2}{4\cdot6} + \frac{1^2\cdot3^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10} + \frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14} + \cdots$$

但是，在日本 π 的近似值也是各式各样的，按其由小至大的顺序排列有：3，$\frac{100}{32}$，3.14，$\frac{22}{7}$，3.2，也有用 3.16 的。

1663 年，村松茂清的《算术》一书中已经有 3.1415926 的记载。书中仅将 3.14 作为 π 近似值使用，但这却比长时间所使用的 3.16 值更精确。

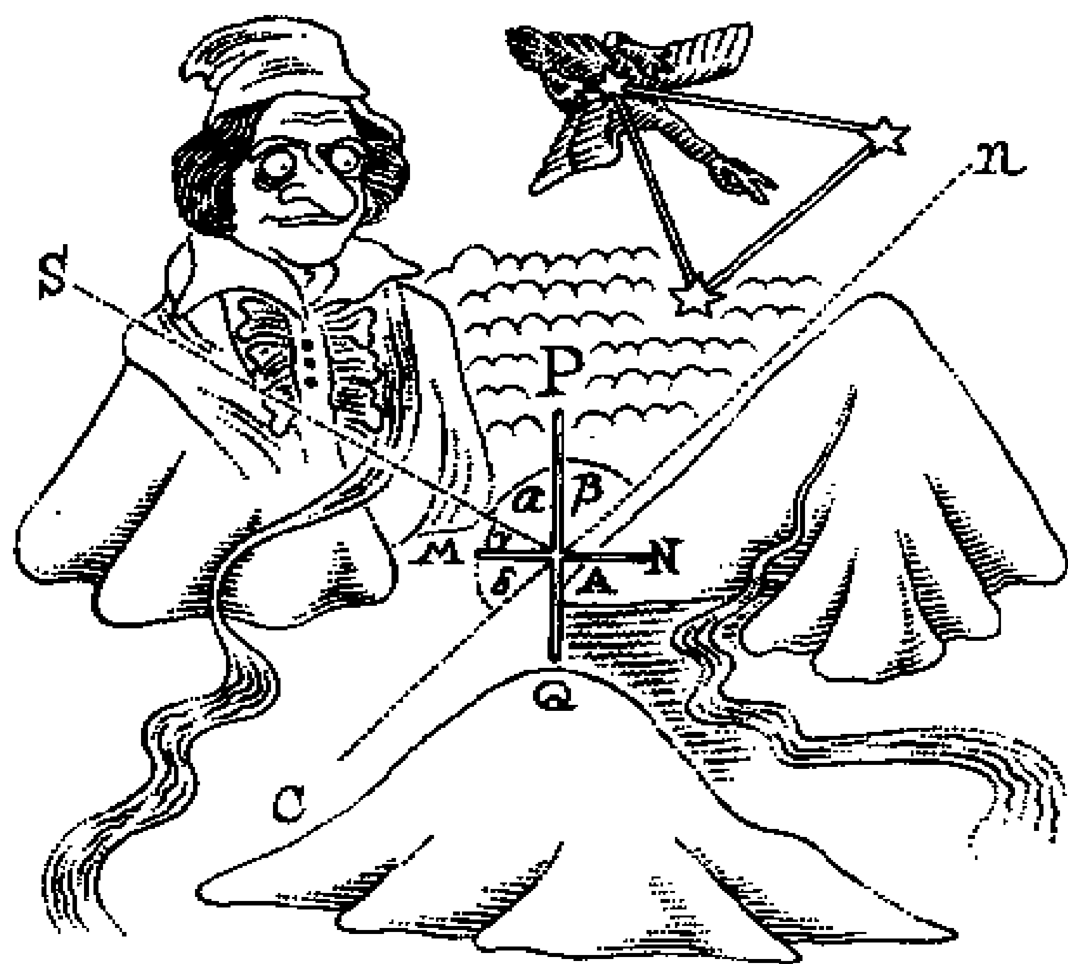
据说，村松茂清是从圆内接正 2^{14} 角形（正 16384 边形）周边的总长度计算得出的上述结果。

江户时期的日本首席数学家関孝和称圆周率为“周率”，而且取其值略小于 $\pi \doteq 3.14159265359$。

第5章

复数在解析几何中的应用

——复数和解析几何的关系——



§ 5.1　两点间距离

复数的利用，拓宽了解析几何学领域。

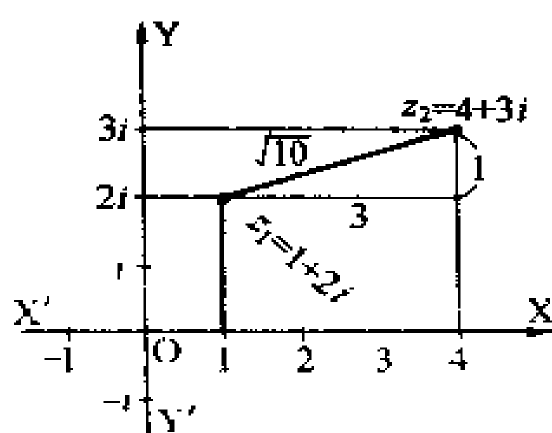


图 5－1

如图 5－1 所示，首先来看两点 z_1、z_2 之间的距离。

当 $z_1=1+2i$，$z_2=4+3i$，则两点间距离 $\overline{z_1z_2}$ 为

$$\begin{aligned} z_1-z_2 &= (1+2i) \\ &\quad -(4+3i) \\ &= 1-4+2i-3i \\ &= -3-i, \end{aligned}$$

而其绝对值

$$|z_1-z_2| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

据此，一般情况下两点间距离就可由 $|z_1-z_2|$ 得出。

大家都知道，在解析几何中两点 $A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$ 的距离可由三平方定理（毕达哥拉斯定理）表示为

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

这两种计算式非常相似。

因此，我们来看看一般通用的公式。

现在，当

$$|\overline{z_1z_2}| = |z_1-z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

时，这里令 $z_1-z_2=z=A+Bi$，因为 $A=a-c$，$B=b-d$，所以

$$|z| = |A + Bi| = \sqrt{A^2 + B^2}。$$

也就是说，两点 z_1 和 z_2 之间的距离为$\overline{z_1 z_2}$，

$$\overline{z_1 z_2} = |A + Bi| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

更确切地说，两点间距离为2个复数的实数部位差的平方以及其虚数部位差的平方相加后的平方根，并且取平方根为正的值。

§5.2 圆

那么，以 z_0 为圆心，半径为 r 的圆的方程式又该怎样表示呢？

满足$|z - z_0| = r$（r 为定值）运动的动点 z 的轨迹，是圆心为 z_0，半径为 r 的圆。

也就是说，方程$|z - z_0| = r$ 表示圆心为 z_0、半径为 r 的圆，如图5-2所示。

这实际是圆的一种简单表达式。

此式自身原本是距某定点 z_0 等距离动点 z 的轨迹，即为圆的定义。

众所周知，在解析几何中，圆心为 C(a,b)，半径为 r 的圆的方程式为

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

如图5-3所示，当圆心 $z_0 = 1 + 2i$，半径 $r = 2$ 时，如若 $z = x + yi$，则

$$|z - z_0| = |(x + yi) - (1 + 2i)| = 2$$

此式整理后，得

$$|(x - 1) + (y - 2)i| = 2$$

所以$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2$，两端平方后，

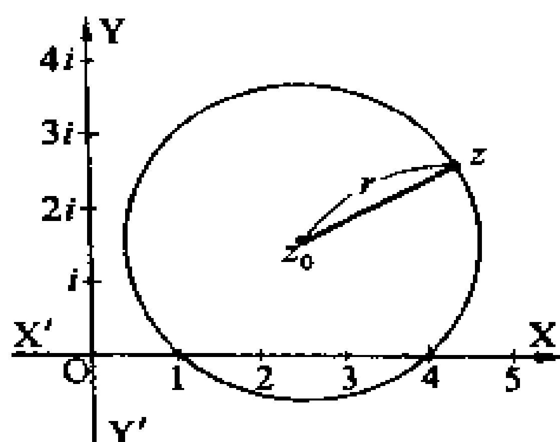


图 5－2

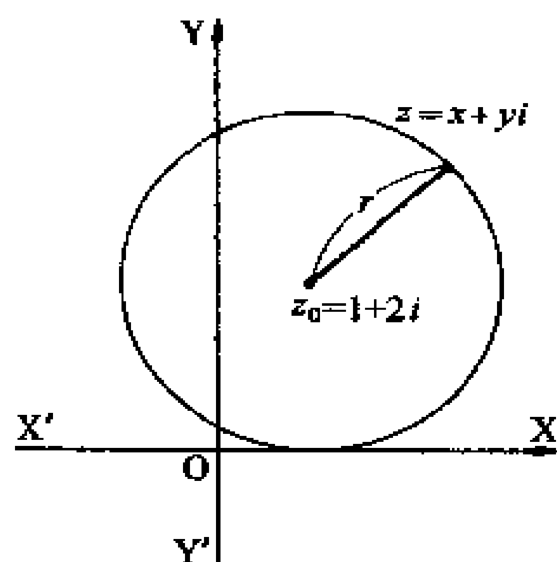


图 5－3

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$。这是圆心为 $z_0=1+2i$，半径 $r=2$ 的圆的方程式。

下面，我们再来看看圆的一般方程式。

圆心为 $z_0=a+bi$，在半径为 r 的圆周上，动点 $z=x+yi$ 运动时，表示此圆的方程式由 $|z-z_0|=r$ 可知，应为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

据此，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

这是圆心为 $z_0=a+bi$，半径为 r 的圆的方程式。

因此，$|z-z_0|=r$ 可表示圆心为 $z_0=a+bi$，半径为 r 的圆。

§5.3 坐标平面上的曲线方程式

大家都知道，坐标平面（coordinate plane，xy 平面）上的曲线方程式通常表示为 $f(x,y)=0$。

这两个坐标轴正交，并且与直角坐标一样。

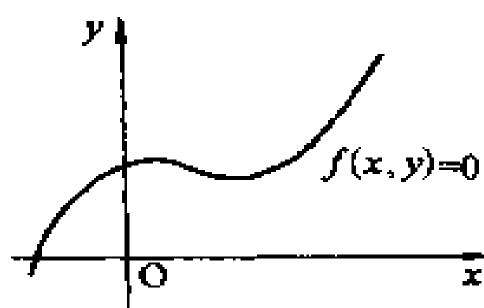


图 5-4

将直角坐标与复数联系起来，就可考虑曲线方程式。

那么，假定复数 $z=x+yi$，则其共轭复数 $\bar{z}=x-yi$。

因此，这两个复数 z，$\bar{z}$ 的和与差分别为

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)=2x$$
$$z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)=2yi$$

由此可见，下列关系式成立。

也就是说，$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$。

将这些 x,y 值代入 $f(x,y)=0$ 式，则

$$f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$$

z 和 $\bar{z}$ 的这种关系，就把坐标平面上的曲线 $f(x,y)=0$ 变成复数表示的曲线。

因此，使用 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$，坐标平面上圆的一般方程式

$$f(x,y)=x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$
$$(A、B、C \text{ 为常数})，$$

则可表示为以下这种复数式

$$f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2}\right)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2$$
$$+2A\frac{z+\bar{z}}{2}+2B\frac{z-\bar{z}}{2i}+C=0$$

展开此式后，则得

$$\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2-2z\bar{z}+z^2}{4i^2}+$$

$$A(z+\bar{z})+\frac{B(z-\bar{z})}{i}+C=0$$

$$\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}-\frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}+$$

$$A(z+\bar{z})-B(z-\bar{z})i+C=0$$

$$\frac{z^2+2z\bar{z}+z^2-z^2+2z\bar{z}-z^2}{4}+$$

$$Az+A\bar{z}-Bzi+B\bar{z}i+C=0$$

$$z\bar{z}+Az-Bzi+A\bar{z}+B\bar{z}i+C=0$$

$$z\bar{z}+(A-Bi)+(A+Bi)\bar{z}+C=0$$

这里，令 $A+Bi=z_0$。则 $A-Bi=\bar{z}_0$，从而上式可表达为

$$z\bar{z}+\bar{z}_0z+z_0\bar{z}+C=0$$

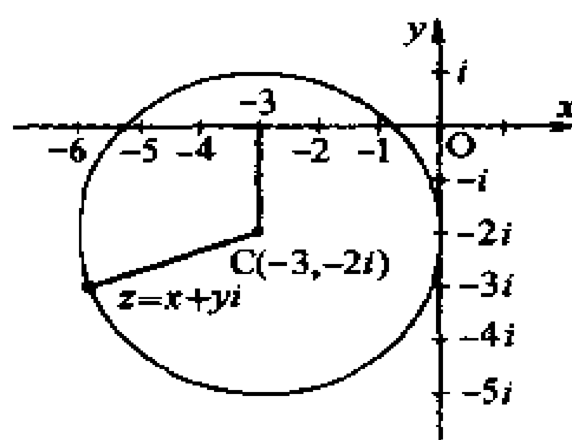


图 5-5

此式为以复数表示圆的一般方程式，其形式新颖，读起来也顺畅。

相反，令 $z=x+yi$ 后，则 $\bar{z}=x-yi$，据此来考虑一下 $A=3$，$B=2$，$C=4$的情况。

将 $z_0=A+Bi=3+2i$ 及 $\bar{z}_0$[*] $=A-Bi=3-2i$，$C=4$ 代入圆的一般方程式

$$(x+yi)(x-yi)+(3-2i)(x+yi)+$$

[*]原书误为 z_0。——译者注

$$(3+2i)(x-yi)+4=0$$

展开此式，

$$x^2+y^2+3x+3yi-2xi-2yi^2+$$
$$3x-3yi+2xi-2yi^2+4=0$$

即 $$x^2+y^2+6x+4y+4=0$$

通过上式配平方为完全平方三项式后，则得

$$(x^2+6x+9)+(y^2+4y+4)=-4+9+4$$
$$(x+3)^2+(y+2)^2=3^2$$

这表示圆心$(-3,-2)$，半径 $r=3$ 的圆。

§5.4 内分点

接着，让我们来看看线段 z_1z_2 按 $m:n$ 比例的内分点。

表示此内分点的复数为 $z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$。

具体地说，$z_1=1+2i$，$z_2=4+4i$，两点间的线段按 1:2 内分的点 z 可示出如下。

$$z=\frac{1\times z_2+2\times z_1}{1+2}$$
$$=\frac{z_2+2z_1}{3}$$
$$=\frac{(4+4i)+2(1+2i)}{3}$$
$$=\frac{4+4i+2+4i}{3}$$
$$=\frac{6+8i}{3}=2+\frac{8}{3}i$$

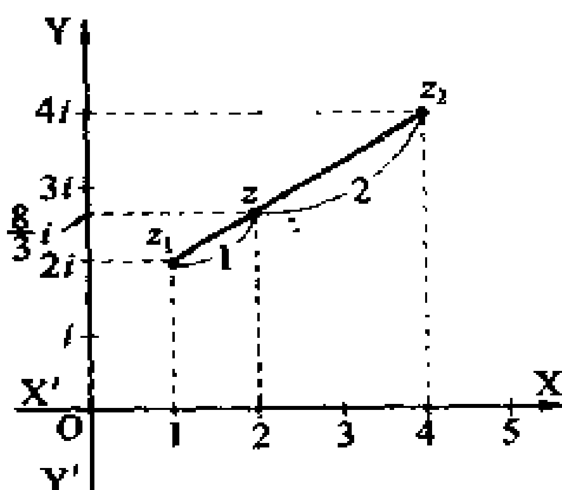


图5－6

由以上结果可知，内

分点 $z=2+\frac{8}{3}i$。

在解析几何中，大家都知道，两点 $A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$组成的线段按 $m:n$ 内分的点 $P(x, y)$为

$$x=\frac{mb_1+na_1}{m+n}, y=\frac{mb_2+na_2}{m+n}。$$

复数内分点虽然不能以 x, y 式表示，但却能把内分点位置简单地归纳为 $z=2+\frac{8}{3}i$ 这种形式。

§5.5 两条直线的夹角

这个问题比较复杂，所以就边看图边来说明。

如图 5-7 中所示，4 个复数 z_1, z_2, z_3, z_4 所表示的两条直线 z_1z_2, z_3z_4 与实轴(X 轴)所构成的倾角分别为 α 和β。

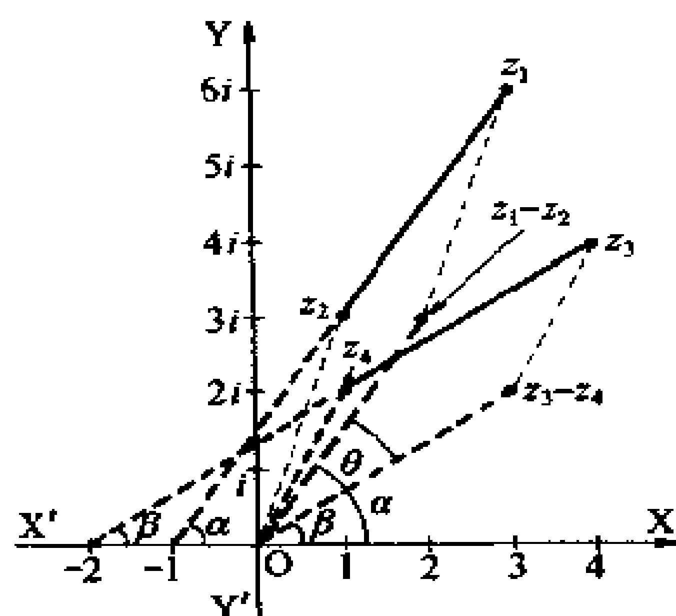


图 5-7

以 z_1z_2 为一边，以原点 O 为第 3 点作一平行四边行。如前所述，此平行四边形的第 4 顶点为 z_1-z_2。

同理，z_3z_4 为 1 边，以原点 O 为第 3 顶点作一平行四边形，而其第 4 顶点为 z_3-z_4。

这样，原点 O 与 (z_1-z_2) 连线，则与实轴（X 轴）的倾角为 α；而原点 O 与点 (z_3-z_4) 连线，则与实轴（X 轴）的倾角为 β。

在此，令复数 $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$，$z$ 的幅角 $\arg z=\arg\left(\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right)$ 可改写为 $\arg z=\arg(z_1-z_2)-\arg(z_3-z_4)$。

因此，$\arg(z_1-z_2)=\alpha$，$\arg(z_3-z_4)=\beta$ 的关系成立。

当然，α、β 分别是平行四边形的边与实轴（X 轴）的夹角。

在此，若令 $\alpha-\beta=\theta$，则

$$\theta=\alpha-\beta=\arg(z_1-z_2)-\arg(z_3-z_4)$$

因此，两线段（或两条直线）z_1z_2，z_3z_4 的夹角可表示为

$$\theta=\arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right)$$

由此结果可知，两条直线（或而线段）互相垂直的条件为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$。

所以 $\arg\left(\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\arg\left(\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right)=\dfrac{3}{2}\pi$ 时，两条直线 z_1z_2，z_3z_4 互相垂直。

同理，两条线段垂直条件也不变。

也就是说，即使两条线段不相交，垂直条件成立时，若将两条线段相互延长，则它们互相垂直。

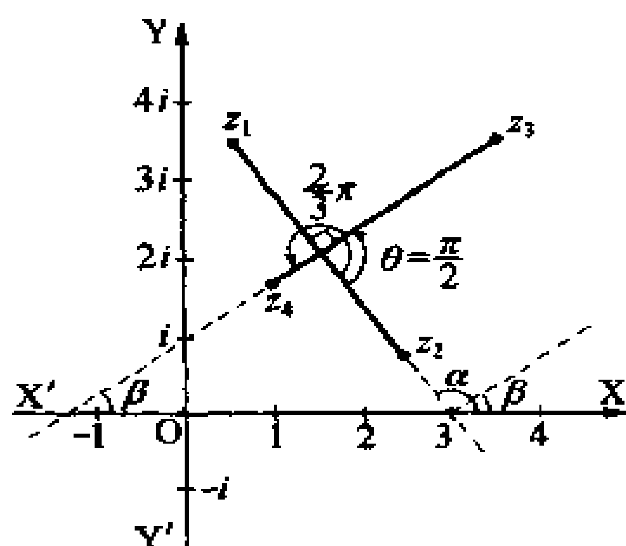


图 5-8

对解析几何而言，两直线 $y = mx + b$，$y = m'x + b'$ 的垂直　件为 $mm' = -1$。

而在复数情况下，两条直线，即 $z_1 - z_2$，$z_3 - z_4$，垂直时，则

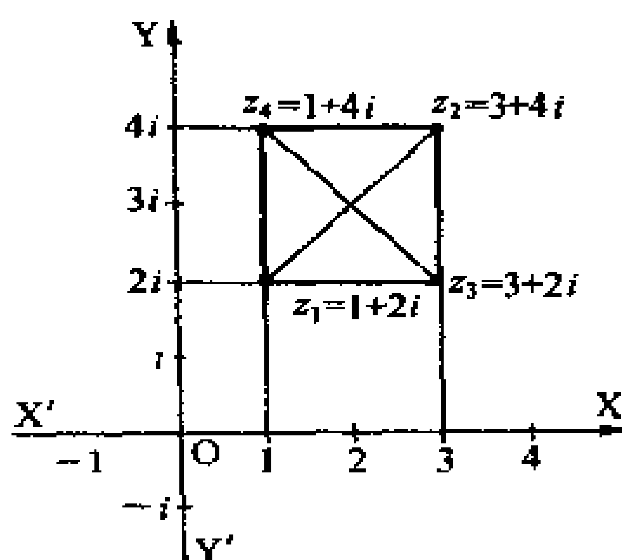


图 5-9

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\pi}{2} \text{或} \frac{3}{2}\pi。$$

下面，举例说明两条直线互相垂直的例子。

如图 5-9 所示，如果

$z_1 = 1 + 2i$，$z_2 = 3 + 4i$

$z_3 = 3 + 2i$，$z_4 = 1 + 4i$

因为这是一个正方形，故其对角线互相垂直。

实际计算一下，则

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \arg\left(\frac{1 + 2i - (3 + 4i)}{3 + 2i - (1 + 4i)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{1 + 2i - 3 - 4i}{3 + 2i - 1 - 4i}\right) = \arg\left(\frac{-2 - 2i}{2 - 2i}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-1 - i}{1 - i}\right) = \arg\left(\frac{(-1 - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-(1 + i)^2}{1 + 1}\right) = \arg\left(\frac{-1 - 2i - i^2}{2}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-1 - 2i + 1}{2}\right) = \arg\left(\frac{-2}{2}i\right)$$

$$= \arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$$

从而证明其对角线互相垂直。

§5.6 相似三角形

两个相似三角形△ABC和△DEF，其A、B、C、D、E、F六个顶点的复数式之间必有以下关系成立。

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}$$

此时

$$\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = \left|\frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}\right|$$

而且，$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}\right)$。

在解析几何中，△ABC∽△DEF的条件为“而个边的比相同，且其间夹角相等”。

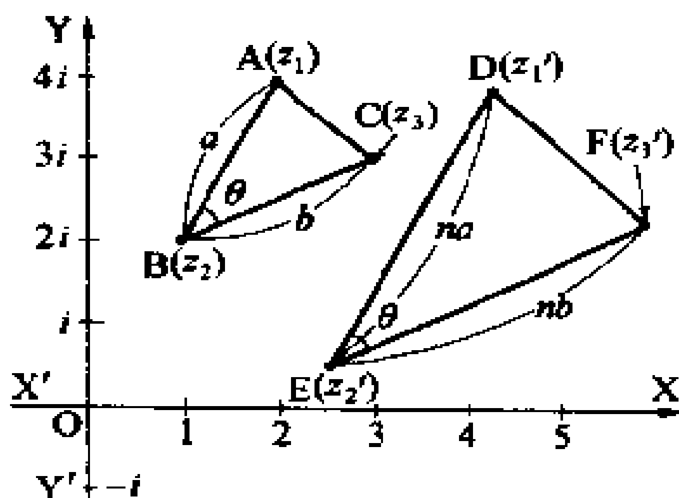


图 5－10　复数平面上的相似三角形

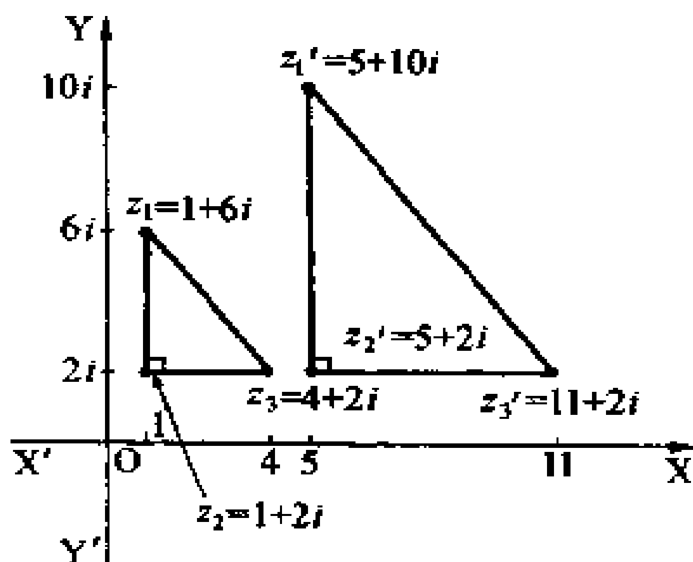


图 5－11

那么，现在来证明图 5－11 中，$\triangle z_1z_2z_3 \backsim \triangle z'_1z'_2z'_3$。

将$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{z'_3-z'_1}{z'_2-z'_1}$改写之后，得

$$(z_3-z_1)(z'_2-z'_1)=(z'_3-z'_1)(z_2-z_1) \quad (1)$$

逐一计算(1)式中每个括弧内的复数值，则有

$z_3-z_1=(4+2i)-(1+6i)=3-4i$

$z'_2-z'_1=(5+2i)-(5+10i)=0-8i=-8i$

$z'_3 - z'_1 = (11 + 2i) - (5 + 10i) = 6 - 8i$

$z_2 - z_1 = (1 + 2i) - (1 + 6i) = -4i$

据此,(1)式左右两端分别为

$$\text{左端} = (3 - 4i)(-8i) = -24i + 32i^2$$
$$= -32 - 24i$$
$$\text{右端} = (6 - 8i)(-4i) = -24i + 32i^2$$
$$= -32 - 24i$$

也就是说,左端 = 右端,因此,等式$(z_3 - z_1)(z'_2 - z'_1) = (z'_3 - z'_1)(z_2 - z_1)$成立。

所以$\frac{z_3 - z_1}{z'_2 - z'_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}$

也就是说,$\triangle z_1 z_2 z_3 \backsim \triangle z'_1 z'_2 z'_3$。

若不改写为(1)式,而将两三角形顶点值原封不变直接代入也可以。

因为

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{3 - 4i}{-4i}$$
$$\frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1} = \frac{6 - 8i}{-8i} = \frac{3 - 4i}{-4i}$$

所以

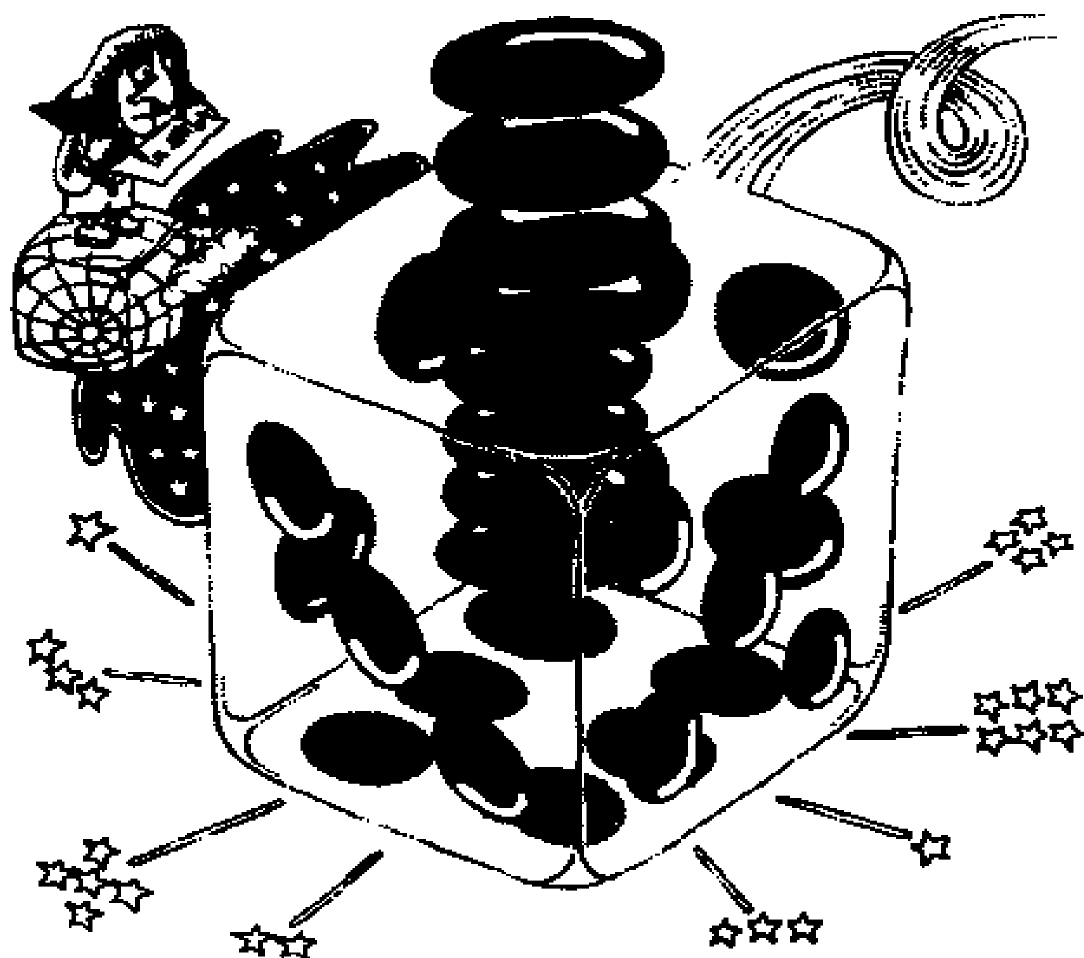
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}$$

以上介绍的是简单实例,感兴趣的读者请参看有关的专门读物。

第6章

德・莫依尔定理

——及与1的n次方根——



§6.1 德·莫依尔定理

德·莫依尔定理是早期复数理论中最有意义的关键公式。此式可书写为

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

大家请注意，等号两端 n 的位置不同。等号左端 θ 的地方，等号右端则相应地转换为 $n\theta$。

此式的考虑顺序，应从绝对值为 1 的 2 个复数 z_1，z_2 的乘积 $z_1 \cdot z_2$ 绝对值 $|z_1 \cdot z_2| = 1$ 开始。

首先，将绝对值为 1 的 z_1，z_2 以其极坐标形式表示，并计算 $z_1 \cdot z_2$ 乘积如下。

因 $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$，$z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$，所以

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \\ &\quad i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \\ &\quad i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \end{aligned}$$

所以，$z_1 \cdot z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$

进一步，以 $z_3 = \cos\theta_3 + i\sin\theta_3$ 的 z_3 乘上式左端，以 $\cos\theta_3 + i\sin\theta_3$ 乘上式右端，则

$$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \\ &= \{\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \\ &\quad (\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) \end{aligned}$$

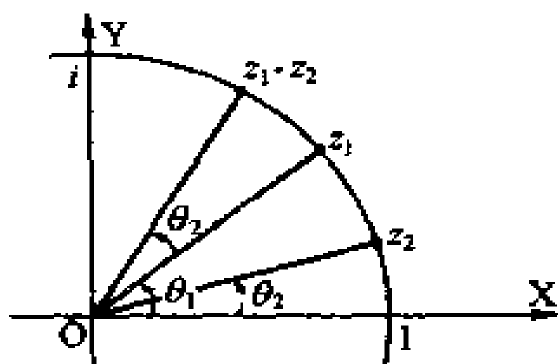


图 6－1

$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

进一步，将 $z_4=\cos\theta_4+i\sin\theta_4$ 与 $z_1\cdot z_2\cdot z_3$ 相乘后，则有

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4 &= \{\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+ \\ &\quad i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\}(\cos\theta_4+i\sin\theta_4) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)+ \\ &\quad i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4) \end{aligned}$$

依此类推，结果如下。

也就是说，诸复数绝对值皆为 $1(|z_k|=1)$，诸复数的幅角 $\arg z_k=\theta_k$，当 $k=1,2,3,\cdots,n$ 时，则诸复数为 $z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k(k=1,2,3,\cdots,n)$。

现在来看看这些复数的连乘积 $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\cdots\cdot z_n$。

将 n 个复数逐个用其极坐标形式表示，并计算这些复数极坐标形式的连乘积，其结果如下。

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\cdots\cdot z_n &= (\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &\quad\times(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)\times\cdots \\ &\quad\times(\cos\theta_n+i\sin\theta_n) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n) \\ &\quad+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n) \end{aligned}$$

这里，令 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\cdots=\theta_n=\theta$ 后，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta(n\text{ 为正整数})$$

这个重要的关系式叫做德·莫依尔定理。

也就是说，三角函数值的幂次 n 为其角度的倍数 n。这也是虚数七个奥秘之一。

下面，顺便介绍一下德·莫依尔的身世。

法国数学家德·莫依尔(Abraham de Moivre，1667～1754)出生于法国香槟纽，此地以盛产香槟泡沫葡萄酒

而远近闻名。由于宗教方面的原因，他 20 岁时曾被驱出法国，而后移居伦敦，在那里他曾担任数学教师。

那段时期里，他与物理学家牛顿和因发现哈雷彗星而闻名的天文学家哈雷(E. Halley,1656～1742)等数学巨匠来往密切，并共同开展过概率论研究。

当时他对哈雷所研究的社会现象和生命现象等颇感兴趣。1711 年他出版了《幸运测定》一书，之后又发表了概率论方面的很多专著。

在他的研究工作中，有关概率论标准曲线问题和当今世界生命保险公司所使用的生命表(余命表)以及有关死亡率的研究等，为后世留下很多珍贵的文献资料。

现在日本广泛使用的养老金分期缴纳等的计算方面莫依尔曾做出过很大贡献。

有名的德·莫依尔定理发表时，他已 67 岁了。在那个时代，他可算是一位大器晚成的数学家。

当时的德·莫依尔定理是关于 n 为自然数，即 $n=1,2,3,\cdots,n$ 时成立。

下面讨论除自然数以外，这个定理是否成立。

在 $z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 0$; p 为正整数(自然数)，而 $n=-p$(负的整数)时，情况又如何呢？

$$z^{-p}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-p}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{p}}$$

$$=\frac{1}{(\cos p\theta+i\sin p\theta)}$$

这里，为使分母实数化，分母、分子同乘以 $\cos(-p\theta)+i\sin(-p\theta)$，从而

$$\frac{1}{\cos p\theta+i\sin p\theta}$$

$$= \frac{\cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)}{(\cos p\theta + i\sin p\theta)\{\cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)\}}$$

$$= \frac{\cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)}{\cos(p\theta - p\theta) + i\sin(p\theta - p\theta)}$$

$$= \frac{\cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)}{\cos 0 + i\sin 0}$$

$$= \frac{\cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)}{1 + i \times 0}$$

$$= \cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)$$

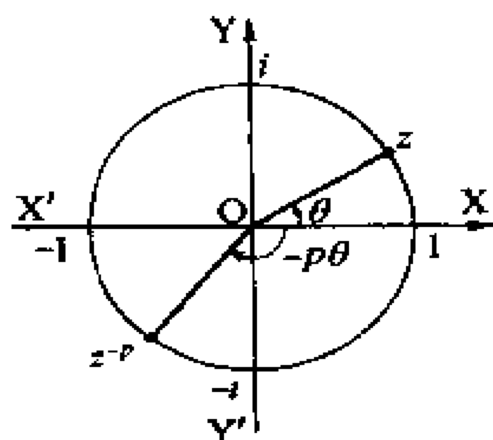


图 6-2

当 p 为正整数，$-p$ 为负整数时，$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-p} = \cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)$ 的关系式成立，也就是说，$-p = n$ 时，该定理也成立，即

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

说明德·莫依尔定理中 n 不仅仅是正整数，n 为负整数时也成立。

值得注意的是，当 $n=0$ 时，z^0 是否等于 1 呢？

下面就来看看 $z^0 = 1$ 的情况。

$n=0$ 时，至今 $|z| = 1$

但是

$$|z| = |\cos\theta + i\sin\theta| = 1 \neq 0$$

所以

$$z^0 = (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = \cos(0 \cdot \theta) + i\sin(0 \cdot \theta)$$
$$= \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \times 0$$
$$= 1$$

即，$n=0$ 时，该定理也成立。

也就是说，n 为 0、正、负整数，德·莫依尔定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

都成立。

下面举出几个简单实例说明之。

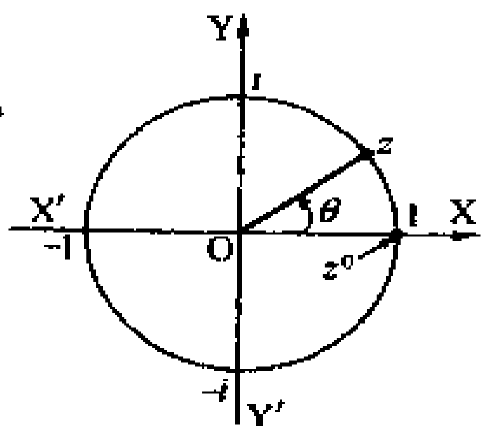


图 6-3

例题 已知 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$，采用德·莫依尔定理，计算 z^2，并与 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2$ 之值比较。

解：

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1。$$

也就是说，$|z| = 1$，则 z 可用极坐标形式表示为 $z = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$，因 $\theta = \frac{\pi}{6}$，故 $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$。

因此，$z^2 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

据此，

$$z^2 = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

另外，

$$z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}i^2$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

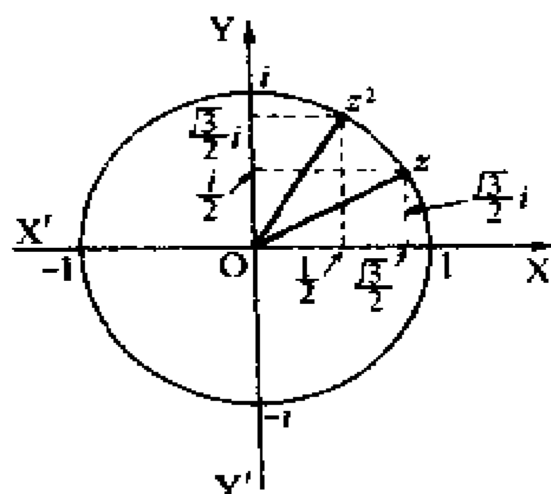


图 6-4

也就是说，采用德·莫依尔定理以及 $z=a+bi$ 的原本形式计算，都可得到 z^2 值的同一结果。

下面，以 $n<0$ 再举个简单例题来验证德·莫依尔定理成立。

例题　已知 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，用德·莫依尔定理计算 z^{-3}，并与$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-3}$之值比较。

解：因为 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$\therefore |z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1}=1$，即 $|z|=1$。

据此，令 $z=\cos\theta+i\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

因为 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

所以

$$z^{-3}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-3}$$
$$=\cos\left(-3\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-3\times\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=0-i\times1=-i。$$

另外，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{3}}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3}+3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}\times\frac{1}{2}i+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}i\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}i\right)^{3}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{3\times3}{8}i+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^{2}+\frac{1}{8}i^{3}}$$
$$=\frac{8}{3\sqrt{3}+9i-3\sqrt{3}-i}$$
$$=\frac{8}{8i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^{2}}=-i$$

也就是说，采用德·莫依尔定理和 $z=a+bi$ 原本形式的计算，都可得到 z^{-3} 值的同一结果。

§6.2 德·莫依尔定理的扩展

将德·莫依尔定理扩展后，下面的关系式也成立。

当 $|z|\neq1$，即复数绝对值不为 1 的 n 个复数连乘积

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \cdots \cdot z_n$$
$$= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$\cdot r_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) \cdot \cdots \cdot r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
$$= r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \cdots \cdot r_n\{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)$$
$$+ i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)\}$$

也成立。

尤其在 $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_n = r, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \cdots = \theta_n = \theta$ 时，则

$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ 成立。

如前所述，式中 n 值可为 0 以及所有整数。

使用复数极坐标形式就可以简单地求解各种各样的问题。

下面，做两个简单计算题。

例题 计算 $(1+i)^8$ 之值。

解：

$$(1+i)^8 = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^8$$
$$= (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8}{4}\pi + i\sin\frac{8}{4}\pi\right)$$
$$= 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$
$$= 16(1 + 0i) = 16$$

例题 计算 $\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{15}$ 之值。

解：

$$\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{15} = \cos\frac{15}{10}\pi + i\sin\frac{15}{10}\pi$$
$$= \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$$

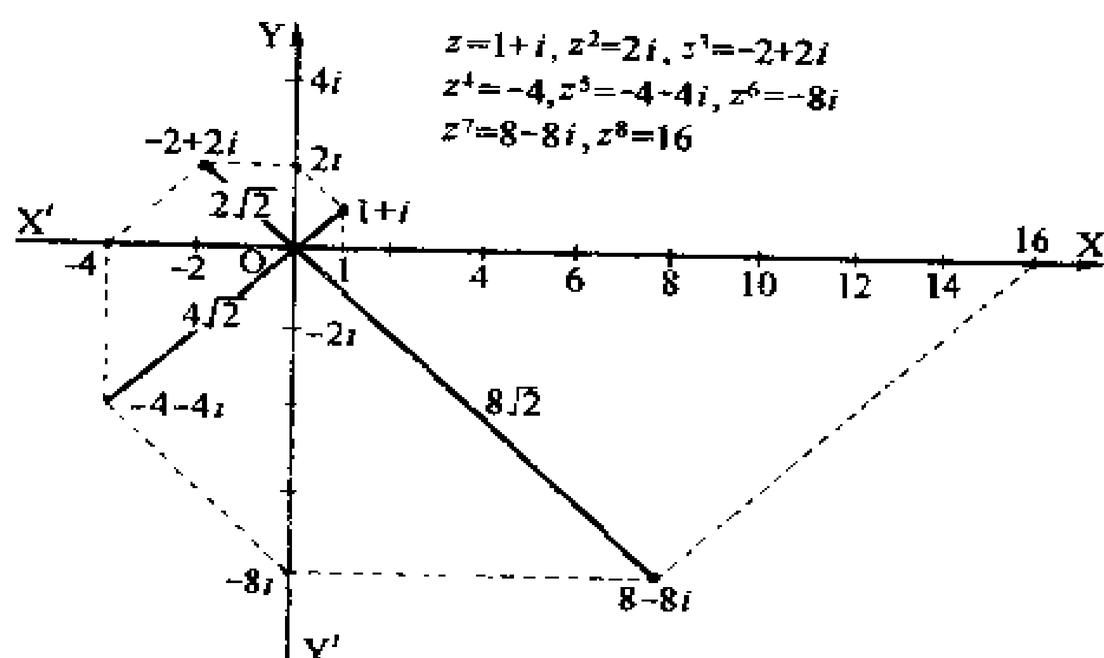


图 6－5

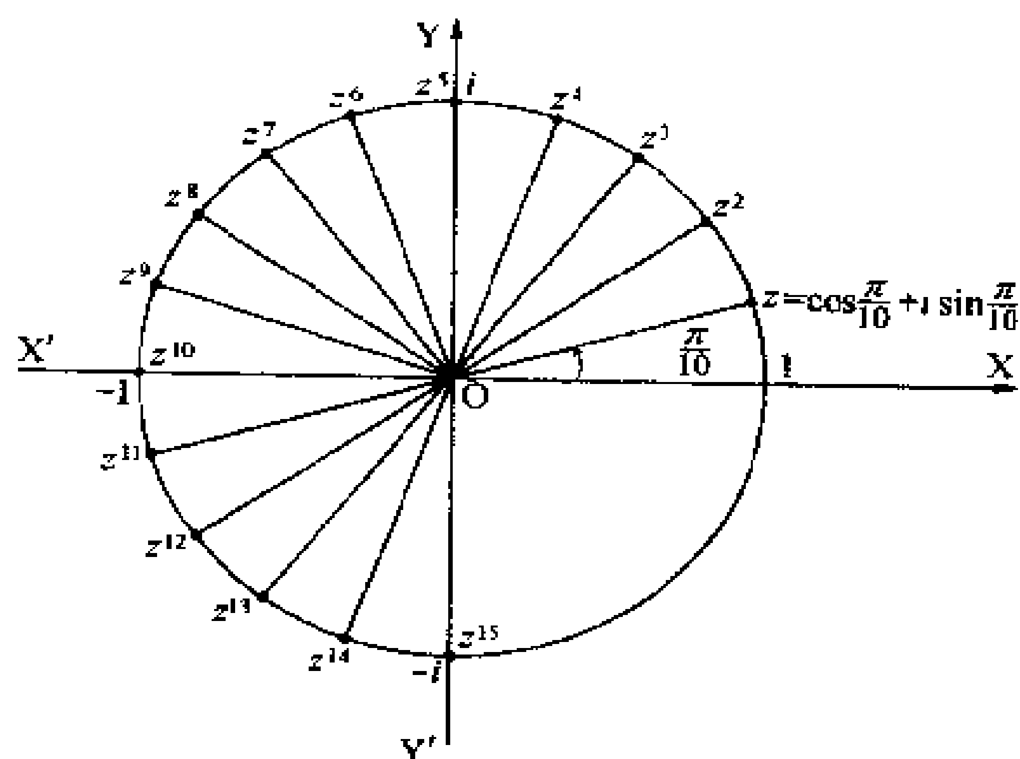


图 6－6

$$= 0 + i(-1) = -i.$$

那末，如果没有德·莫依尔定理，上例$(1+i)^8$的

计算就得另想诀窍。

为此，需要应用帕斯卡三角形展开二项式。下面介绍展开$(a+b)^n$式的各项系数。

$n=1,2,3,\cdots,n$ 的二项式$(a+b)^n$展开式，其系数依次可排列为帕斯卡三角形数表[*]如下。

$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a+b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$(a+b)^8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
········	··

因此，使用帕斯卡三角形计算$(1+i)^8$的结果示出如下。

$$
\begin{aligned}
(1+i)^8 &= 1+8i+28i^2+56i^3+70i^4+56i^5 \\
&\quad +28i^6+8i^7+i^8 \\
&= 1+8i-28-56i+70+56i-28-8i+1 \\
&= (1-28+70-28+1)+(8-56+56-8)i \\
&= 16+0i=16
\end{aligned}
$$

像8次方这样的二项式，利用帕斯卡三角形计算起来简单，但幂次若大于15就繁琐多了。

显而易见，使用德·莫依尔定理就方便多了。

综上所述，数学这门学问，程度越高，其实际应用

[*]此数表叫做贾宪三角，是我国北宋时期数学家贾宪(约11世纪)在他的“开方作法本源”图(指数为正整数的二项定理系数表)中最先提出的，比帕斯卡早600年。——译者注

价值就越大。

因此，必须实实在在地理解数学的概念和理论，牢固掌握基础知识，而完全靠死记硬背是绝对不行的。

下面顺便介绍有关帕斯卡的身世。

帕斯卡(Blaise Pascal，1623～1662)是法国数学家、物理学家、哲学家和宗教思想家。他身为贵族子弟，1623年6月19日诞生于法国中南部的克莱蒙。

其父是当地重罪裁判所所长，一位有教养的知名人士。

帕斯卡3岁时，因母亲去世，是帕斯卡的父亲把他和他的两位姐妹一起扶养长大的。

在少年时代，帕斯卡的几何学兴趣十分浓厚，除他自己收藏的书外，经常在家里翻两父亲的书看。可是，父亲认为“孩子太小的时候，不宜阅读高深难懂的书”。为此没收了少年帕斯卡所有的书。

实际上，其父也是位数学爱好者，并有丰富的数学知识，他经常出席梅尔森迺牧师家中的数学研讨会。当时的著名数学家德萨格、惠更斯、海尤拉、卡比、鲁波等经常在此聚会，并且定期在此开展数学研究活动。

由于书籍被父亲没收了，少年帕斯卡只好在院子里的石头上独自钻研所画的几何图形。这样，在12岁(另一说9岁)时，少年帕斯卡突然告诉父亲“三角形三内角之和是一定值”，并讲明其理由。父亲听后很吃惊，高兴得热泪盈眶。

此后，帕斯卡的才华受到了父亲的认可，并把所没收的欧几里得几何学等书籍还给了他，让他自学。

尔后，父亲就带14岁的帕斯卡一起出席梅尔森迺家中的数学家聚会，少年帕斯卡有机会亲自聆听大数

学家德萨格和惠更斯等人的指教，使他在几何学方面的功力猛长。

另外，在物理学方面，他发现了与压力相关的著名的帕斯卡原理。众所周知，有关液体和气体压力的帕斯卡原理，现在已广泛用于汽车的油制动器、火车的空气制动装置以及建筑工程中的蒸气锤等方面。

帕斯卡本来体质很弱，加上他又非常勤奋钻研，结果损害了他的健康，19岁时就患染肺结核病。



帕斯卡(1623～1662)

1651年，帕斯卡28岁时，由于父亲去世，妹妹又住进保罗·洛娃娅鲁女修道院，他曾一度情绪低沉。但是，使他感到欣慰的是，他结识了当地君主和公爵等上层人士，而且彼此往来十分密切。

那时，帕斯卡受一位赌博师委托，承担了解决赌博分配金的问题，从而他潜心研究概率论并完成了概率数学的理论研究工作。

尔后，帕斯卡领悟了世界余生短暂，并开始倾向宗教。作为宗教思想家，晚年他曾著书立说，并出版了《耶稣·基督概要》等宗教宣传方面的小册子。他的文章风格轻快优雅，语言表达直爽多彩，这种新型文章风范被引入到后来的法语中了。

1662年8月19日，年仅39岁的帕斯卡英年早逝。死后，他的妹妹、近亲们和保罗·洛娃娅鲁修道院的朋友们将帕斯卡的遗稿整理为著名的《冥想录》一书出版。

作为哲学家，帕斯卡在《冥想录》中有这样的名言："人生如苇"、"克里欧佩拉的鼻子再低一点（借此暗示不那么贪权），世界历史将会是另一个样子。"

§6.3 怎样计算1的立方根

现在我们来看一下，根据德·莫依尔定理怎样计算1的立方根。

当然，立方根就是三次方根。

首先，令1的立方根为 z，并用其极坐标形式表达为

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ 从而 $z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 1$

根据德·莫依尔定理，上式可改写为

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = 1$$

并可记为 $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = 1 + 0\times i$，因此下列关系式成立，即

$$\cos 3\theta = 1, \sin 3\theta = 0$$

因此，令 $3\theta = 2k\pi$（k 为整数）后，则 $\theta = \dfrac{2}{3}k\pi$。

当 $k = 0,1,2$ 时，$\theta_1 = 0, \theta_2 = \dfrac{2}{3}\pi, \theta_3 = \dfrac{4}{3}\pi$，据此，

$k = 0$ 时，$\theta_1 = 0$

所以 $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\times 0 = 1$

$k = 1$ 时，$\theta_2 = \dfrac{2}{3}\pi$

所以 $z_2 = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$k = 2$ 时，$\theta_3 = \dfrac{4}{3}\pi$

所以 $z_3=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

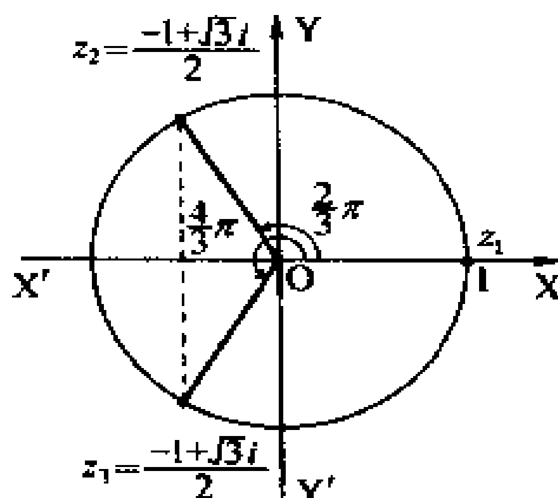


图 6－7

因此，1，$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$三个值是所求 1 的立方根。这三个值也可记为 1，$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。

可是，若有一个虚数 ω 为 1 的立方根，则另一个立方根必为 ω^2。为此，证明如下。

首先，令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，所以

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

故
$$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

另外，若令

$$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

则

$$\omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}$$

故 $\omega^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

因此,1 的立方根可表达为 $1,\omega,\omega^2$。

这样,$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$中的哪一个为 ω,则剩下的那一个就是 ω^2。

还有,ω 与 ω^2 互为共轭虚数。

ω 称为原始立方根(primitive cube root)或虚数立方根(cube root of imaginary number)。

总之,1 的立方根是 $1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$;若采用希腊字母表示,则 1 的立方根为 $1,\omega,\omega^2$,而且,ω 可取$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$、$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$两者之中任意一个。

不管怎么说,$\omega^3=1,\omega^2+\omega+1=0$ 这种关系式成立。

§6.4 怎样计算 1 的 n 次方根

首先,令 1 的 n 次方根为 z,并可用极坐标形式表示为 $z=\cos\theta+i\sin\theta$。

当然,z 的绝对值$|z|=1$。

因此,下列关系式成立。

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=1$$

根据德·莫依尔定理,上式可改写为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=1$$

另外,因为 $1=1+0\times i$,所以 $\cos n\theta=1,\sin n\theta=0$。

因此,令 $n\theta=2k\pi$(k 为整数),由此可得 $\theta=\frac{2k}{n}\pi$。

这里,对应于 $k=0,1,2,3\cdots$ 的 θ 若取为 θ_1,θ_2,

$\theta_3 \cdots$

$$\text{则 } \theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{2}{n}\pi, \theta_3 = \frac{4}{n}\pi, \cdots$$

因此，

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_2 = \cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi$$

$$z_3 = \cos\frac{4}{n}\pi + i\sin\frac{4}{n}\pi \cdots$$

当 m 为整数，n 为偶数($n = 2m$)时，则 1 的 n 次方根除 1 之外尚有 -1 和共轭复数 ω, ω^2，而且全部共有偶数个。

若 n 为奇数($n = 2m - 1$)时，则 1 的 n 次方根除 1 外互为共轭虚数，全部共有奇数个。

将这些 n 次方根以图示之，则有图 6－8 这样的图示结果。

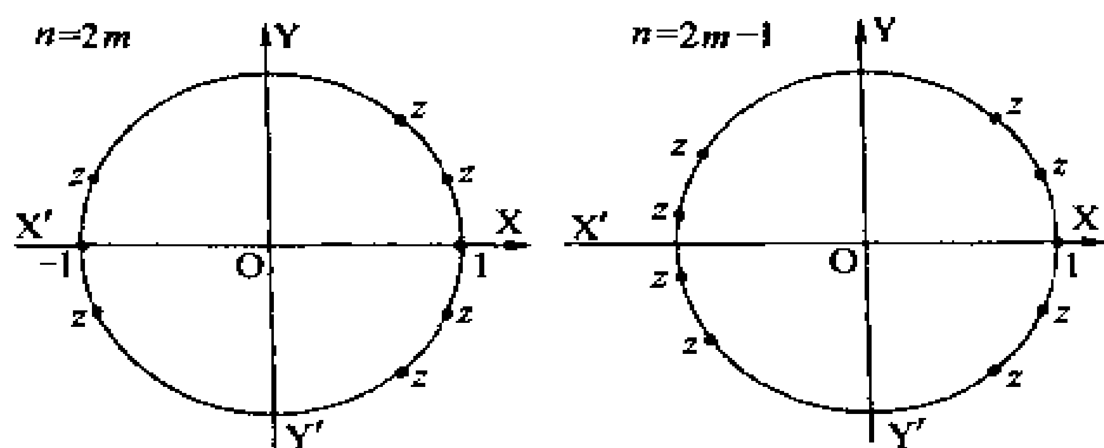


图 6－8

例题 求 1 的 4 次方根。

解 令 1 为 4 次方根为 z，用极坐标形式表示后，则

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

据此，$z^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = 1$，并根据德·莫依尔定理，则 $\cos4\theta + i\sin4\theta = 1$。

另外，令 $1 = 1 + 0 \times i$，

则 $\cos4\theta = 1, \sin4\theta = 0$。

因此，$4\theta = 2k\pi$（k 为整数）这种关系成立，

所以 $\theta = \frac{k}{2}\pi$。

这里是求 1 的 4 次方根，所以令 $k = 0,1,2,3$，（这样反复调换 $k = 4,5,6,7; k = 8,9,10,11$），则 $\theta_1 = 0$，$\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \pi, \theta_4 = \frac{3}{2}\pi$。

因此，

$k = 0$ 时，$\theta_1 = 0$，故 $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$

$k = 1$ 时，$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$，故 $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$$= 0 + i \times 1 = i$$

$k = 2$ 时，$\theta_3 = \pi$，故 $z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \times 0 = -1$

$k = 3$ 时，$\theta_4 = \frac{3}{2}\pi$，故 $z_4 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$

$$= 0 + i \times (-1) = -i$$

所以，1 的 4 次方根共有 4 个，分别为 $1, i, -1, -i$，如图 6-9 所示。

例题　求 1 的 5 次方根。

解：令 1 的 5 次方根为 z，用极坐标形式表示后，则

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

据此，$z^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = 1$ 并根据德·莫依尔定理，则

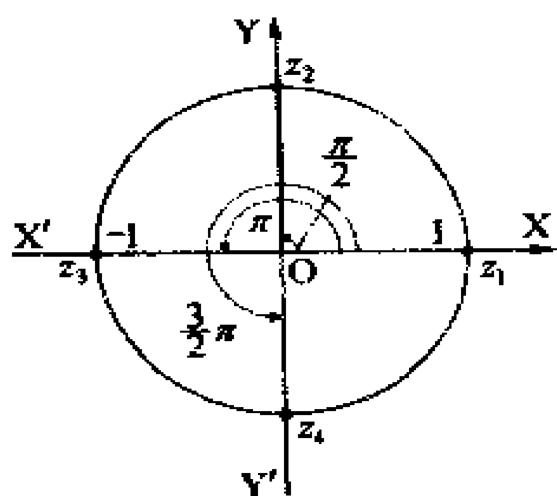


图 6-9

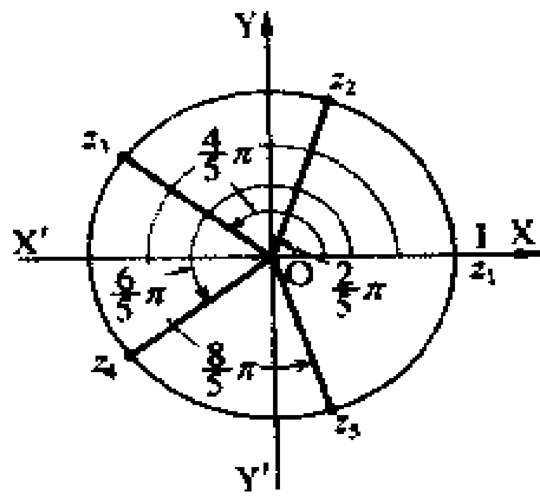


图 6-10

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = 1$$

另外，令 $1 = 1 + 0 \times i$，所以 $\cos 5\theta = 1$，$\sin 5\theta = 0$，因此 $5\theta = 2k\pi$（k 为整数），从而 $\theta = \frac{2k}{5}\pi$。

这里是求 1 的 5 次方根，所以令 $k = 0,1,2,3,4$（这样反复调换 $k = 5,6,7,8,9$；$k = 10,11,12,13,14\cdots$），则 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{2}{5}\pi, \theta_3 = \frac{4}{5}\pi, \theta_4 = \frac{6}{5}\pi, \theta_5 = \frac{8}{5}\pi$。当

$k = 0$ 时，$\theta_1 = 0$，故 $z_1 = \cos 0 + i\sin 0$

$$= 1 + i \times 0 = 1$$

$k = 1$ 时，$\theta_2 = \frac{2}{5}\pi$，故 $z_2 = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$

$k = 2$ 时，$\theta_3 = \frac{4}{5}\pi$，故 $z_3 = \cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi$

$k = 3$ 时，$\theta_4 = \frac{6}{5}\pi$，故 $z_4 = \cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi$

$k = 4$ 时，$\theta_5 = \frac{8}{5}\pi$，故 $z_5 = \cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi$

以上所记 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 均为 1 的 5 次方根。

但是，如果将$\frac{2}{5}\pi=72^\circ$代入，改写为 $a+bi$ 形式后，计算起来可就麻烦多了。

第7章

$e^{\pi i}=-1$是e,π,i“三角恋”关系吗

——e和虚数的关系——



§7.1 指数函数 $y=a^x$

所有函数都可表示为直线或曲线。现在将着重介绍与对数相关的指数函数。

这里使用笛卡儿直角坐标平面。通常，$y=a^x$ 叫做以 a 为底的指数函数(exponential function)，而 x 称为指数(exponent，index)。

可是，所谓的指数又是什么数呢？现简单说明如下。

像 $2\times2\times2=2^3$ 以及 $\frac{1}{3\times3}=\frac{1}{3^2}=3^{-2}$，数字右上方小写的 3 及 -2 通常称为指数。

指数可以是正整数、负整数、0、小数、分数，当然无理数也有是指数的。

在 $y=a^x$ 中，若 $a=1$，则 $a^x=1^x=1$，所以，$a\neq1$，而且 $a>0$。

若 $y=a^x$ 中的 $a=2$，取 x 为…，-3，-2，-1，0，1，2，3…则可由表 7－1 中获得相应的 y 值。

表 7－1

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

若 $y=a^x$ 中，取 $a=\frac{1}{2}$，则 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}$ 的相应值可由表 7－2 给出。

表 7-2

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

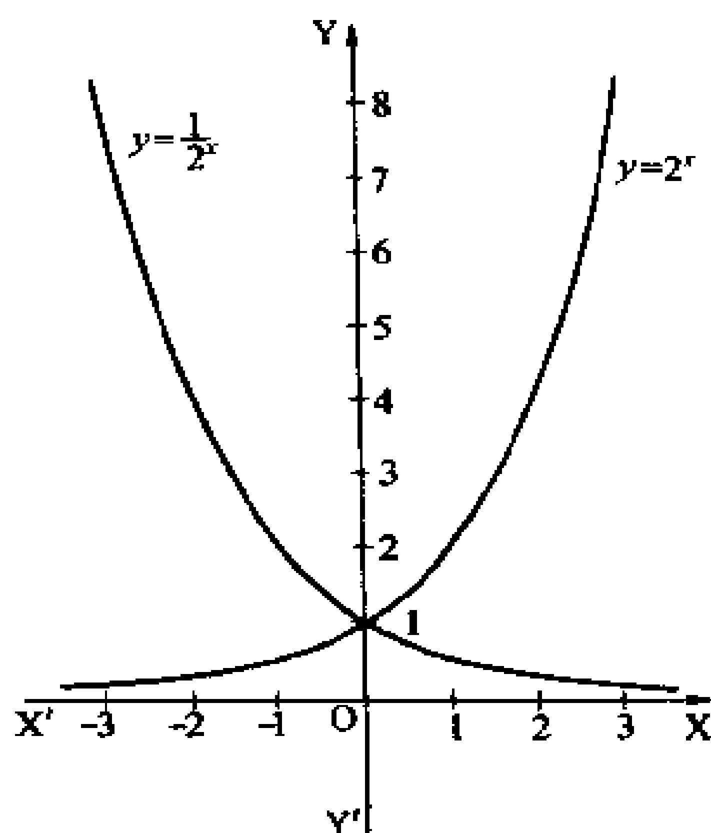


图 7-1

由图 7-1 可见，$y=2^x$ 和 $y=\frac{1}{2^x}$ 两条指数曲线均对称纵轴（Y 轴）。一般来讲，$y=a^x$（$a\neq1,a>0$）曲线有如下性质。

(1) 由 $a\neq1,a>0$ 可知，$y=a^x$ 曲线位于 x 轴上方；

(2) $a>1$ 时，是向右增大的曲线；

(3) $0<a<1$ 时，是向右减小的曲线；

(4) a 值在 $a\neq1,a>0$ 范围变化，曲线一定通过

定点(0,1),因为 $a^0=1$。在此,着重说明 a^0。

众所周知,$a^2\times a^3=a\cdot a\times a\cdot a\cdot a=a^{2+3}=a^5$

$$a^3\div a^2=\frac{a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a^{3-2}=a^1=a$$

因此,$a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0$

另外,$a^2\div a^2=\frac{a^2}{a^2}=1$,所以 $a^0=1$

所以,$a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0$;但是 $a^2\div a^2=\frac{a^2}{a^2}=1$,因此,$a^0=1$,即 a^0 永远等于 1。

总而言之,除零(0)以外,任何数的 0 次方都等于 1。值得注意的是,冒然认为 $a^0=0$ 的人,也大有人在。

下面,再说说指数定律。

当 a、b 为实数时,若 m,n 是正整数,则以下关系式均成立。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

$$(a\times b)^n=a^n\cdot b^n$$

此外,还有上面提到的 $a^0=1$。

也就是说,底数相同的幂的乘法或除法,是其幂数相加或相减,而幂次的幂是其指数相乘。

还有,若指数为负整数,即 $p>0$ 且 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$。

还有,p,q 为正整数时,$a^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{a^q}=(\sqrt[p]{a})^q$。

这里,$\sqrt[p]{a}$是其本身自乘 p 次后为 a 的数,即 a 的 p 次方根。

可是,前面曾经见到过这种 e^{θ} 函数。这里指数为

虚数的指数函数。以前所见的指数均为实数，现在已将指数范围扩展到虚数了。

e 称为自然对数的底，e 不是正的整数，而是正的无限小数，并且是不循环的无限小数。

也就是说，e 属于实数之列，并且是实数中的无理数。

§7.2 自然对数的底是什么数

在对数和微积分中经常出现 e。这里就简单说说 e 的情况。

当 x 为实数（有理数和无理数）时，存在一极限值 e，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

其值大于 1，且小于 3，这是瑞士数学家欧拉（Euler）以其名字的英文字头命名的一个实数极限。

也就是说，e 是无限小数，其近似值为 $e\doteq 2.71828$。

下面稍离正题，简单地介绍使用 e 后，指数和对数函数的微积分运算都变得非常方便。

为此，简单说明如下。

微分情况下，$y=a^{x}$ 时，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^{x}=a^{x}\cdot\log_{e}a$，

若 $y=e^{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x}=a^{x}\cdot\log_{e}e=e^{x}$。

这样，因 $\log_{e}e=1$，所以 $(e^{x})'=e^{x}$，并且函数 e^{x} 微分多少次都依然不变，因此，它是一种不可思议的函数。

另外，对于 $y=\log_a x$ 对数函数而言，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e$$

而以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，

则有 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

就更简单，也就是说 $(\log_e x)'=\frac{1}{x}$。

还有，指数函数 $y=a^x$ 在积分情况下有

$$\int y dx=\int a^x dx=a^x\log_a e+C（C 为积分常数），$$

而在 $y=e^x$ 时，

则

$$\int y dx=\int e^x dx=e^x\log_e e+C$$

$$=e^x+C（C 为积分常数）$$

这样，e^x 积分多少次其形态都不变。

但是，因为 $\int e^x dx=e^x+C_1$（C_1 为积分常数），所以 $\int(e^x+C_1)dx=e^x+C_1x+C_2$（$C_2$ 为积分常数），这样，每次积分时，除 e^x 外，还得积分常数项 C_1，从而增加一项整数函数（幂函数），这是值得注意的。

这里稍离正题，让我们来看看怎样计算这个 e 值。

欧拉认为，函数可写作一切无穷级数。

众所周知，当 x 为实数时，

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

这里，$n!$ 是 n 的阶乘，即正整数（自然数）由 1 至 n 按顺序连乘的符号。

即

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\cdots\times 3\times 2\times 1$$

例如,5! 表示 $5\times4\times3\times2\times1=120$。

$n!$ 读作 n 的阶乘,也有人读作 n 阶乘。

在上述 e^x 展开式中,若将 $x=1$ 代入后,则

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

这里使用符号 $\sum$(希格马)和阶乘,上式可简单地写作为

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$\sum$ 是希腊文字"和数(相加)"一词字头的大写字母。$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ 读作希格玛,表示 k 值由 0 至无穷大。

那么,指数函数 $e^{i\theta}$(i 为虚数单位,θ 为实数)又是什么函数呢?

$e^{i\theta}$是指数为虚数(纯虚数)$i\theta$ 的指数函数,是一种虚数三角函数。

现在来看看这种虚数三角函数的应用。

若 θ 为任意实数,与此值相关的 $\cos\theta + i\sin\theta$ 则表示一个复数的极坐标形式。

取此极坐标形式为 θ 函数,并表达为 $f(\theta)$。因此,可以记之为 $f(\theta)=\cos\theta + i\sin\theta$。

此时,当 $\theta=0$ 时,$f(0)=\cos0 + i\sin0 = 1 + i\times0 = 1$。

进一步,使用三角函数的乘法公式表示后,

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

这是众所周知的。

采用函数符号表示后,则记为(1)式那样。

$$f(\theta_1)\cdot f(\theta_2) = f(\theta_1+\theta_2) \qquad (1)$$

可是,指数函数 $e^{k\theta}$ 中的 k,θ 为实数,如果 $\theta=0$,则 $e^{k\times 0}=e^0=1$。

还有,因为 $e^{k\theta_1}\cdot e^{k\theta_2}=e^{k(\theta_1+\theta_2)}$,如果 θ 的函数 $e^{k\theta}$ 为 $f(\theta)=e^{k\theta}$ 时,则 $f(\theta_1)\cdot f(\theta_2)=f(\theta_1+\theta_2)$。

因此,可将 $e^{k\theta}$ 定义为(2)式,即

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ (\theta \text{为实数}) \qquad (2)$$

在(2)式中,当 $\theta=0$ 时,(2)式等号的

左端 $= e^{i\theta} = e^{i\times 0} = e^0 = 1$

右端 $= \cos\theta + i\sin\theta = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0 = 1$

所以,$\theta=0$ 时,等式(2)成立。

因此,对 $e^{k\theta}$ 而言,当 k 为虚数单位 i 时,也同样与 k 为实数相同,都满足指数法则

$$e^{k\theta_1}\cdot e^{k\theta_2} = e^{k(\theta_1+\theta_2)}$$

只是 k 为实数或虚数单位 i,θ 为实数(弧度)。

可是,$\theta=2n\pi$[*]时,因为

$$e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi$$
$$= 1 + i\times 0 = 1$$

所以 $e^{(2n\pi+\theta)i}=e^{2n\pi i}\cdot e^{\theta i}=e^{i\theta}$($n$ 为整数)。

这些是正弦、余弦周期性的结果。

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$$

即

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$$

[*]原文误为 $\theta=2n\pi i$。——译者注

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$$

即

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \times 0 = -1$$

即

$$e^{\pi i} = -1$$

以上所得的结果 $e^{\pi i} = -1$，即无穷小数 e 自乘 π（无穷小数）次，再进一步自乘 i 次的结果为 -1，虽然有些不可思议，但却也有些道理。

虚数（想像中的数）之发展变化，的确令人惊奇。虚数的七个奥秘实在是光彩夺目，令人赞叹不已。

因为 $i^2 = -1$，$e^{\pi i} = -1$，i^2 和 $e^{\pi i}$ 之值均为 -1。这一事实可称之为"创新想像的最大奥秘"。

这个奥秘不用符号，用专业术语书写，则记为

$$(\text{无理数})^{\text{无理数}\times\text{虚数}} = \text{实数}$$

谁能预想到这种奇妙的关系呢？

在 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 中，令 θ 为 $-\theta$，

$$\text{则 } e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

因此，下列关系式成立：

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式(3)称为欧拉公式。

顺便提一下，公式 $e^{\pi i} = -1$ 的指数顺序互换，写作 $e^{i\pi} = -1$ 也可以。

$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + i \times 0 = -1$

所以 $e^{\pm\pi i} = -1$。

§7.3 七桥问题和一笔画

有关欧拉的小故事很多，其中最有名的是“七桥问题”。



欧拉(1707～1783)

瑞士出生的大数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707～1783)曾以证明七桥问题的不可能而闻名。

至今约200年前，东普鲁士(现在的德国)的哥尼斯堡城有七座桥，普雷格尔河流过这七座桥下，并环绕有个叫库奈发夫的小岛。哥尼斯堡七座桥和库奈发夫岛的概略位置如图7-2所示。

当时有人提出：“要求每座桥只能过一次，尔后再返回原处，问能否完全经过这七座桥?”虽然街头巷尾都在议论，但却无人能回答此问题。

据说，此问题的由来是这样的：军队撤退时想用炮车炸毁渡桥。要求每座桥只过一次，问能否全部渡过这七座桥，而炮车再返回原处。”

当时，欧拉路过这里并说道：“这是不可能的”，并用图7-3说明了其中的道理。

图7-3是经过A,B,C,D,E,F,G七座桥的路线示意图，其中没有偶点，但奇点却有4个之多。这就是欧

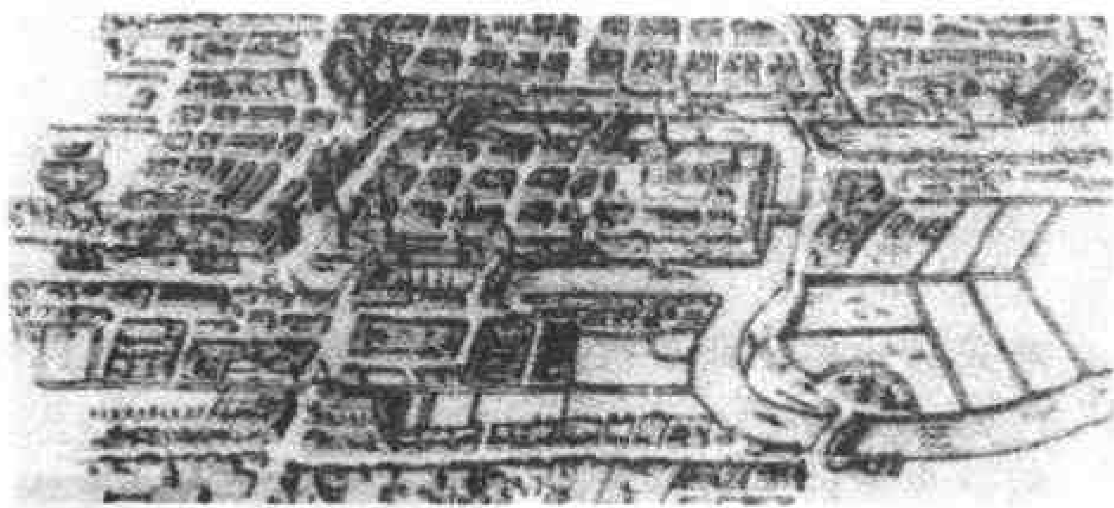


图 7-2　岛上七座桥位置

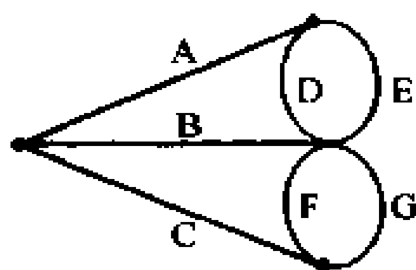


图 7-3

拉当时提出不可能的理由。

所谓“奇点”就是有奇数条线汇集的点，而“偶点”就是有偶数条线汇集的点。

欧拉在“七桥问题”的基础上，进一步发现了有名的“一笔画”原则。按照此原则，能够一笔画的情况是“偶点的数目可任意，但奇数点不可多于2个”。这时，在各点处可经过任意次，但在每条线上只能走一次。

图7-4是几个简单的一笔画例子，其中没有标明文字的点为偶数点，只要从奇点起笔一笔画都能完成。

现在人们已经完全清楚一笔画原理。在车站的票价表和路线图中，那些点和线就是根据这个原理画出的，看上去一目了然。这也是拓扑学和位相几何学的实际应用之一。

欧拉由分析一笔画起步，进而创始了拓扑学，现在拓扑学已成为一门出色的学科。

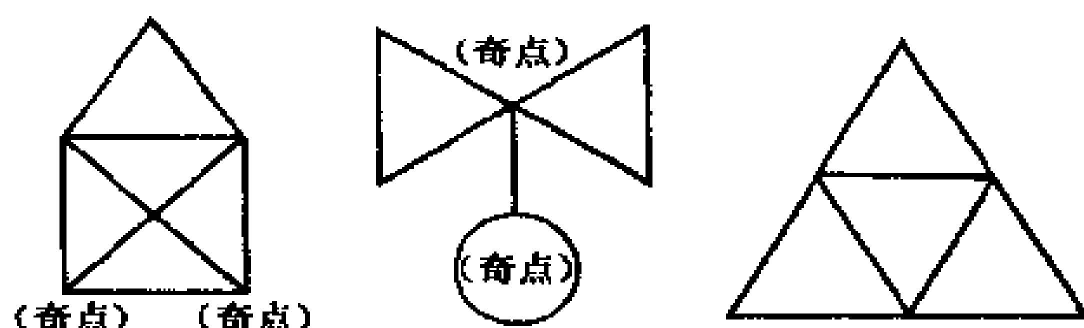


图 7－4

后来，在德国和俄国两所科学院，欧拉都是十分活跃的院士。

除了数学、天文学、物理学之外，欧拉甚至还研究过植物学、化学，其业绩可以说遍及自然科学的各种领域。

他和闻名数学界的伯努利(Bernoulli)家族一样，都出生在瑞士巴塞尔。

欧拉是瑞士一位牧师的儿子，父亲渴望他继承父业，并让他在巴塞尔大学攻读神学，但欧拉颇受伯努利全家人的喜爱和影响，他还在这所大学学习数学。

不久，年仅 26 岁的欧拉在俄国圣彼得堡科学院取得重要职位。1735 年，他由于劳累过度，右眼失明。

1740年，欧拉受普鲁士国王高薪聘用到德国工作，担任柏林科学院数学部部长，并在此从事 20 多年科研工作。

尔后，受俄国女皇叶卡捷琳娜招聘，于 1766 年返回彼得堡科学院继续在俄国从事科研，从而导致左眼也失明。

尽管双目失明，可他一直没离开过数学，至 1783 年他 77 岁过世之前，他一直持继不断地研究数学。

欧拉为解析几何和微积分的发展竭尽全力，并在代数学、几何学、整数论等方面也取得了辉煌的业绩。

尤其在三角函数方面，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的符号是他提出来的，而且他是创立并在形式上把微分学发展为变分学的先驱者。

因此，欧拉被同时代的人誉为“数学分析的化身”，并因而流芳百世。

§7.4 复数的指数法则

当指微为复数 $z=x+yi$ 时，指数函数 e^z 则定义如下：

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

如此定义 e^z，使 e^z 已不具有 e 的 z 次自乘的含义，因此与其写 e^z，还不如记之为 $\exp z$ 更好些。exp 是英文指微（exponent）一词的缩写。

在 $e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 式中，若 $y=0$，$e^z=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x(1+0)=e^x$。

所以，z 为实数时，$e^z=e^z$

下面来看一下，当 z 为一般复数 $z=x+yi$ 时，指数法则是否依然成立。

如果 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，则

$$\begin{aligned}
e^{z_1}\cdot e^{z_2} &= e^{x_1+y_1 i}\cdot e^{x_2+y_2 i}\\
&= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)\\
&= e^{x_1}\cdot e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2)\\
&= e^{x_1+x_2}\cdot\{\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\}
\end{aligned} \tag{4}$$

如前所述，

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$$

则

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2+(y_1+y_2)i} \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot e^{(y_1+y_2)i} \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot \{\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\} \end{aligned} \tag{5}$$

(4)式和(5)式的等式右端相同，所以 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ 成立。

可是，对 e^z 而言，却有以下两个性质。

① $e^z \neq 0$

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

上式中，不论 x 为正或负，最终 $e^x > 0$。

这是因为 $x > 0$，当然 $e^x > 0$；即使 x 为负的情况下，即 $x < 0$ 时，$-x > 0$，所以

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{e^{|x|}} > 0$$

总之，不管 x 为正或负，最终 $e^x > 0$。

还有，在 $e^{yi} = \cos y + i\sin y$ 中，$\cos y$、$\sin y$ 不会同时为 0。所以，$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y) \neq 0$。

也就是说，e^z 不会为 0。

② e^z 作为复数 z 的指数函数考虑时，$f(z) = e^z$ 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数。这是复数函数 e^z 的另一个重要性质。

对任意复数 z 而言，

$$\begin{aligned} e^{z+2n\pi i} &= e^z \cdot e^{2n\pi i} \\ &= e^z(\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi) \\ &= e^z(1 + i \times 0) = e^z \end{aligned}$$

也就是说，$e^{z+2n\pi i}=e^{z}$

这也是虚数的七个奥秘之一。

请注意这和前面讲的 $e^{i\theta+2n\pi i}=e^{i\theta}$ 一样。

这样，指数法则

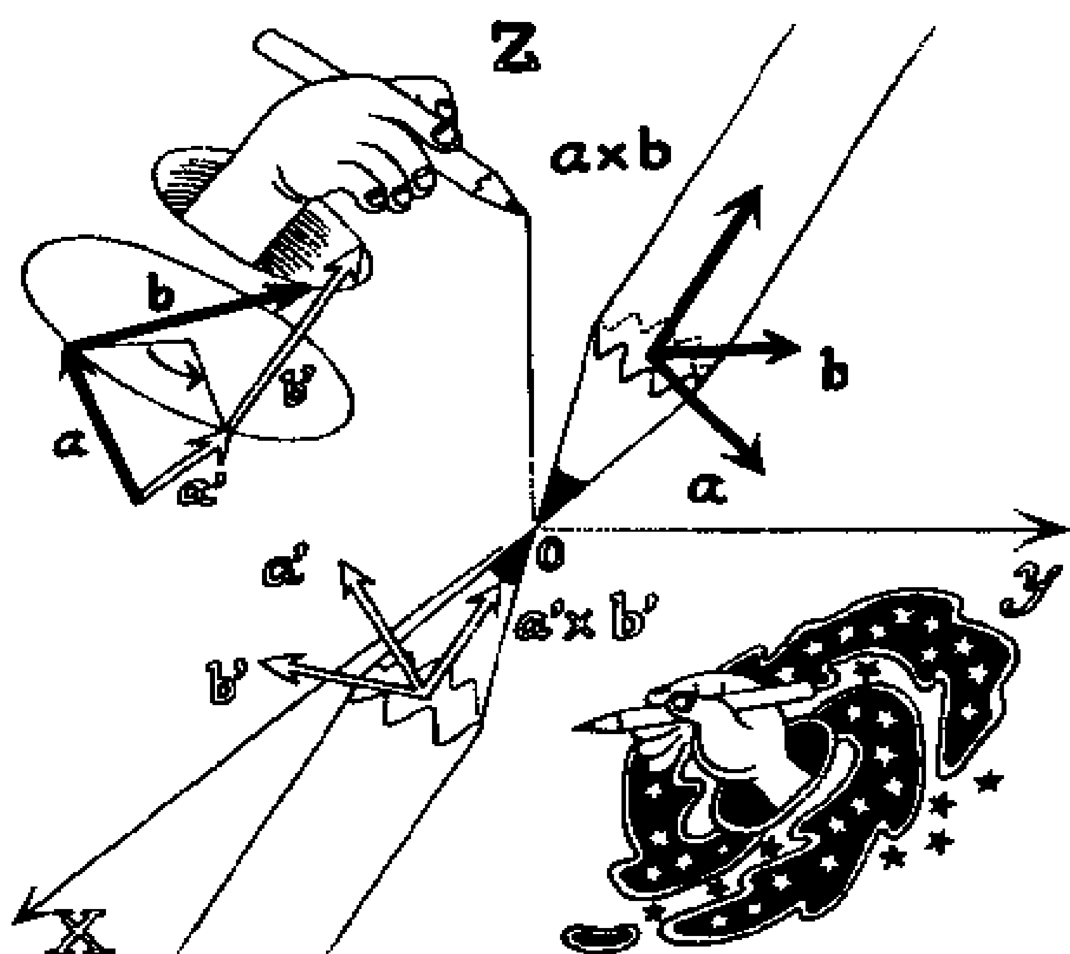
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}, e^{-z}=\frac{1}{e^{z}} \text{ 等}$$

当然也成立。

第8章

向量和复数的关系

—— 极坐标与极坐标方程式 ——



§8.1 平面坐标的表示方法

首先，简单说明众所周知的解析几何平面坐标。

解析几何的平面坐标有两种，一种是 x 轴和 y 轴正交的直角坐标(orthogonal coordinates)，也叫笛卡儿坐标(Cartesian coordinates，Descartes' coordinates)，另一种是两个轴呈斜角相交的斜角坐标。

直角坐标平时经常可见，中学以上的学生谁都知道，而斜角坐标却十分少见。

在直角坐标平面上，xOx' 与 yOy' 两直线正交于点 O 处，并且以 O 为原点相继画出数轴 $x'Ox$，面与 yOy' 构成直角坐标系。这种情况下的 x，y 值均为实数。

直线 $x'Ox$ 由原点 O 往右，即 Ox，为正；相反，由原点 O 往左，即 Ox'，为负。

直线 yOy' 由原点 O 往上为正；相反，由原点 O 往下为负。

此时，由坐标平面任一点 P 处，引出两条垂线与 $x'Ox$ 和 yOy' 分别交于 A、B 两点，而其在 $x'Ox$，yOy' 上的坐标分别为 x，y，从面确定了按顺序编成的(x, y)实数组。同时，A 的坐标记为 $A(x)$，B 的坐标记为 $B(y)$。图中 $x=3$，$y=2$，所以可记为 $A(3)$，$B(2)$。

相反，给出 2 个实数构成的(x, y)组后，$x'Ox$ 上坐标为 x 的一个 A 点就确定了，而在 yOy' 上坐标为 y 的一个 B 点就确定了。

因此，由 A、B 两点分别引出垂直 $x'Ox$ 和 yOy' 的两条垂线在 P 点相交。P 点的坐标是$P(x, y)$。

图 8－1 中的 4 边形 BOAP 通常为长方形，除点

$P(x,y)$之外，其他角上的点为原点(0,0)，A点$(x,0)$，B点$(0,y)$。

这样，坐标平面上的所有点与顺序排列的实数组(x,y)一一对应。

此时，坐标x称为P点的x坐标，y称为P点的y坐标。

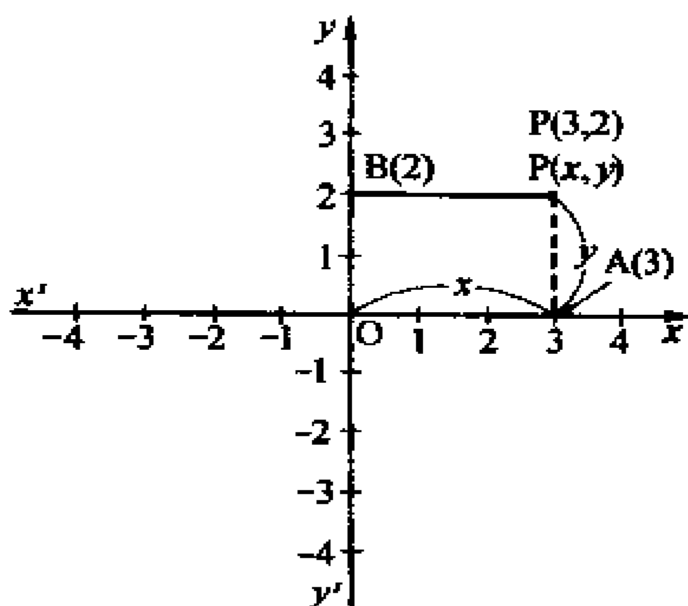


图8-1

图中P点的$x=3,y=2$，因此P点表示为$P(3,2)$。

这里，x坐标称为横坐标，y坐标称为纵坐标。

这样规定之后，两个顺序排列的实数组(x,y)称为P点的平面坐标，并用$P(x,y)$表示。

进一步，规定直线$x'Ox$为x轴或横轴，直线yOy'为y轴或纵轴，而x轴和y轴统称为坐标轴。

还有，这两个坐标轴所确定的平面叫做坐标平面，两轴交点为O，称为原点。

以上介绍的是正交或直角坐标系，即笛卡儿坐标。

§8.2 笛卡儿的简历

法国哲学家和数学家笛卡儿(René Descartes，1596～1650)出生于法国贵族家庭。

他周游过德国、荷兰、意大利等国家，并又曾在各地旅居过一段时期，从面使他的知识和见闻非常广泛。

笛卡儿留下一句拉丁语的著名哲理名言：我思故

我在。

母亲生下笛卡儿不到一年就去世了。他 10 岁时进入耶稣教会学校学习，21 岁已是荷兰志愿军的高级军官。

从军 3 年后，笛卡儿离开了军界，开始从事光学研究，并发现了光的折射原理。

笛卡儿研究宇宙，并相信地动学说，但得知伽利略被宗教法庭判罪之后，他的地动学说研究论文被迫不能发表。

因此，笛卡儿只发表过光学、气象学和几何学方面的论文，那时他已经 41 岁了。

据说，有时他因病卧床不起，却因此注意到由顶棚天花板垂下的蜘蛛丝，由此而联想到他的解析几何学，并开始思考空间点位置的表示方法，但他不研究立体解析几何学。



笛卡儿(1596～1650)

大概看到玻璃窗上落着一只苍蝇，使他联想到平面解析几何中的坐标系。但有的书中却说，他看到天花板上落有一只苍蝇，使他联想到坐标概念。究竟哪种说法正确至今仍无从考证。

晚年他接受瑞典女王柯利斯蒂娜的邀请，去了斯德哥尔摩，但他病了大约半年之后，年仅 54 岁就过世了。这对多数的数学家来说，可谓英年早逝。

笛卡儿是欧洲近代哲学的主要开拓者之一，因此

曾被誉为“现代哲学之父”。在数学领域，笛卡儿首先提出采用代数方法研究几何学(即解析几何学)，这在科学史上是具有划时代意义的创举。

下面稍离正题，简单介绍一下伽利略的概况。

伽利略(1564～1642)是家中的长子，按当时意大利风俗，长子的名和姓应相同，因此他的全名姓为伽利奥·伽利略。



伽利略(1564～1642)

关于伽利略的最闻名的故事是他提倡地动学说，并为此受到当时宗教法庭制裁，被幽禁在山村里。

伽利略学生时期，他注意到比萨教堂煤油灯的摇摆与脉博速度相关，从而发现了举世闻名的钟摆等时性，而这一发现就是迄今广泛应用的钟摆原理。

伽利略最初是学医的，后来中途改学数学和物理学。伽利略是经典力学和实验物理学的先驱者。通过有名的比萨斜塔落体实验(即轻重不同的两个球从同一高处同时落下，则其落下速度相同)建立了落体定律，从而推翻了物体落下速度与其重量成比例的“权威”学说。

很久以前，甚至自日本幕府末年至明治(1800年后半期)时期，一般人都认为地球是圆的，但那时人们不相信在我们所居住的地面正下方还会有地面，甚至认为即便有，那里的人们肯定会像蝙蝠似地头朝下生活着。他们相信所谓的天动说，并且认为物体越重其

自由降落的速度越快。

现在言归正传，让我们接着讨论非正交（斜交）坐标系。

斜交坐标（oblique coordinate）的两个坐标轴（x 轴和 y 轴）倾斜相交，由其交点 O 引出两条数轴 $x'Ox$ 和 yOy'，其交角 $\angle xOy$ 为 θ，则 $x'Ox$ 和 yOy' 分别称为 x 轴和 y 轴。

当然，$x'Ox$ 和 yOy' 的交点 O 为原点。

在 x 轴上，取横坐标为 x 的 A 点，在 y 轴上取纵坐标为 y 的 B 点。

过 A 点引一条平行 y 轴的平行线，过 B 点引一条平行 x 轴的平行线，两者相交于 P 点。顺序排列的实数组 (x, y) 与 P 点一一对应。

这样，坐标平面上的所有 P_k 点均与顺序排列的两个实数组 (x_k, y_k) 一一对应。

这种坐标系是斜交或斜角坐标系。

此时，B、O、A、P 四个点就是一般平行四边形的 4

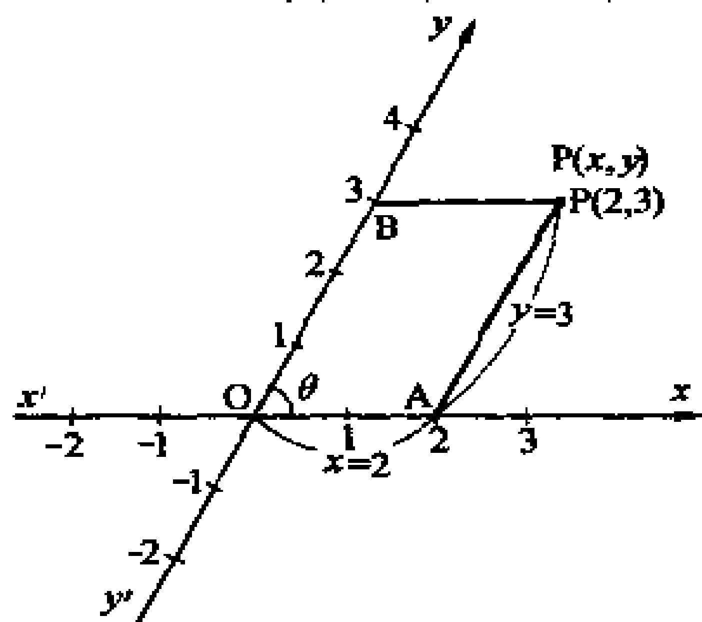


图 8－2

个顶点。

在图8－2中，P点的坐标为(2,3)，这与直角坐标中所表示的P(2,3)相同。

当斜交的两个轴夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，当然就与直角坐标一样了。

所以，在斜交坐标中包含直角坐标。也就是说，斜交坐标的特殊情况(即 $\theta=\frac{\pi}{2}$)为直角坐标。

日常生活中常见的直角坐标实例甚多，围棋的棋盘就是其中之一，如图8－3所示。

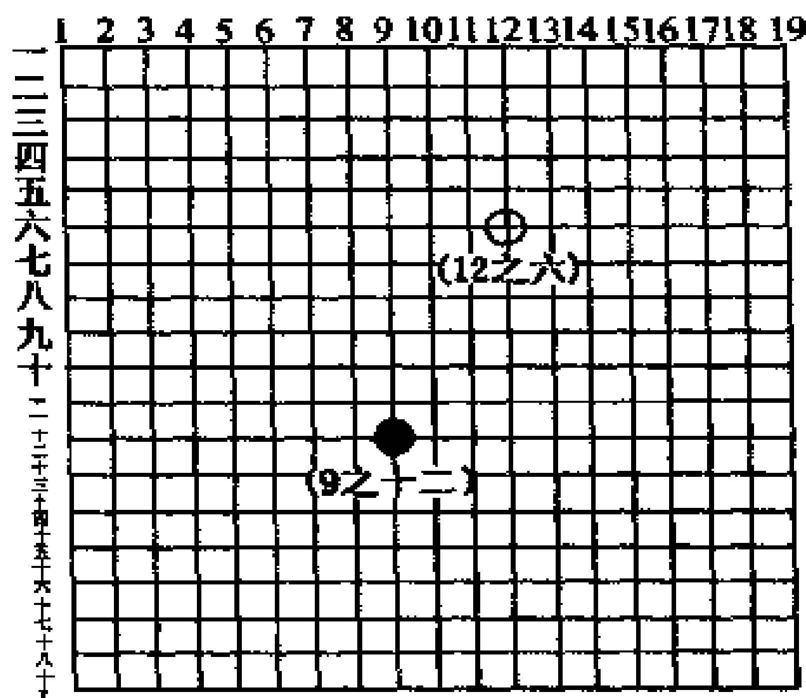


图8－3

围棋盘以(1，－1)为原点，并且是第4象限的坐标平面。

国际象棋的棋盘却与此稍有不同，这里表示棋子位置的不是2条垂直线的交点，两是横竖线之间的网

格。

再者，日本京都市内的街道多为直角正交道路。因此，那里的街道布局呈现为棋盘格子状。

§8.3 极坐标表示方法

这里，进一步讲讲稍微改变了的极坐标。

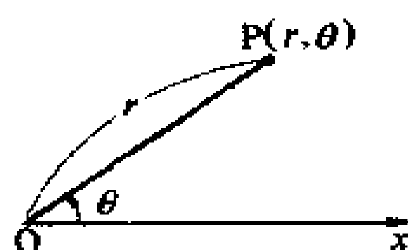


图 8-4

如图 8-4 所示，引出正向半直线 Ox，截取长度为 r 的线段，并由 Ox 起逆时针旋转 $\angle xOP$。这样，由 $\angle xOP$ 及 $\overline{OP}$ 所表示的坐标称为平面上 P 点位置的极坐标。

图 8-4 中，因为 $\angle xOP = \theta$，$\overline{OP} = r$，所以 P 点的位置可表示为 $P(r,\theta)$。

这样，利用 r 和 θ 所表示的点是极坐标点的位置。

因此，若 $\theta = \angle xOP = 30^\circ\left(=\frac{\pi}{6}\right)$，$r = \overline{OP} = 5$ 时，P 点的位置则记为 $P(5,30^\circ)$ 或 $P\left(5,\frac{\pi}{6}\right)$。

这里，r 为正或 0，即 $r \geq 0$，θ 的变化范围在正负无穷大之间，即 $-\infty < \theta < +\infty$。

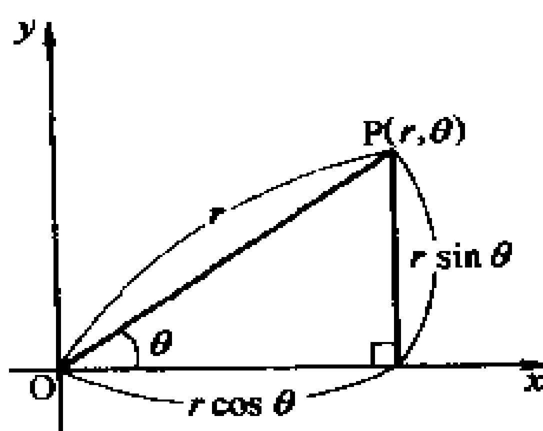


图 8-5

采用这种表示方法时，O 称为极(pole, polar singularity)，半直线 Ox 称为始线(initial line)，线段 OP 称为

动径(radius),始线与动径之间的夹角 θ 称为幅角。

此时,极坐标与直角坐标有如下关系。

$$r\cos\theta = x$$

$$r\sin\theta = y$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

采用反正切符号后,θ 可记为

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \text{或 } \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

例如,$\tan\theta = \frac{1}{2}$ 时,则 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ 或者 $\theta = \arctan\frac{1}{2}$。

一般情况下,若 α 为数值的话,$\tan^{-1}\alpha$ 则读作 α 弧度的反正切。也有读作反正切 α 的。

反正切为正切三角函数的反函数。

三角函数是周期函数,反三角函数也是周期函数,以 α 数值为正切的角可有无数个之多。

例如,$\tan^{-1}1$ 的角可有 $\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi \cdots -\frac{3}{4}\pi, -\frac{7}{4}\pi, \cdots$ 无数多个。

因此,由三角函数周期来确定角度范围,则规定反三角函数值只有一个,此值称为反三角函数的主值。

正切函数,即 $\tan\theta$ 的周期为 π,所以 $\tan^{-1}\alpha$ 的主值为 $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}\alpha < \frac{\pi}{2}$。

$\sin^{-1}\alpha$,$\cos^{-1}\alpha$ 等在此无关系,所以不再把它们的主值标出。

使用极坐标表示圆、椭圆、抛物线、双曲线等圆锥

曲线(conic section, conics)以及各式各样的曲线就简单多了。

首先,举例示出简单直线如下。

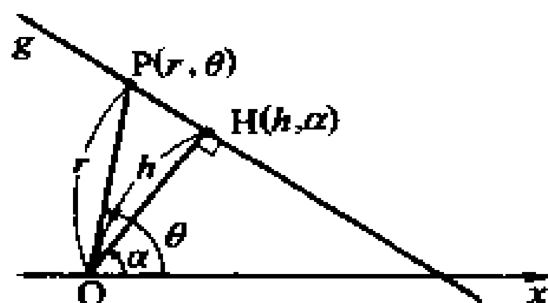


图 8-6

如图 8-6 所示,直线 g 的方程式是直线上动点 $P(r,\theta)$ 的轨迹,而由极点 O 向直线 g 所作垂线的垂足为 $H(h,\alpha)$,从而

$$r\cos(\theta-\alpha)=h$$

这是直线 g 的极坐标方程式。式中,r,θ 为变数,α,h 为常数。

下面具体做个练习题看看。

例题 求图 8-7 中,直线 g 的极坐标方程。

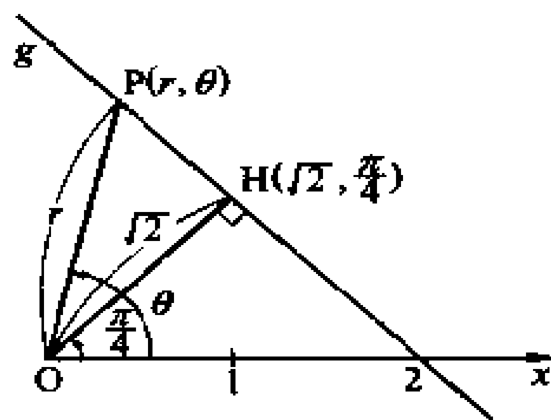


图 8-7

解:令直线 g 上的动点为 $P(r,\theta)$,因 $\overline{OH}=\sqrt{2}$,$\angle HOx=\frac{\pi}{4}$

所以,$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 即为所求。

现在,试将此极坐标式改写为直角坐标式。

因直角坐标与极坐标之间有如下关系,

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \qquad (1)$$

首先,在直线的极坐标方程式中使用两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

展开直线的极坐标方程式左端后,则

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)=\sqrt{2}$$

$$r(\cos\theta+\sin\theta)=2$$

$$r\cos\theta+r\sin\theta=2$$

将(1)式之值代入上式后，则

$$x+y=2，即\ y=-x+2$$

这是斜率为 -1，y 轴截距为 2 的一条直线。

§8.4 圆的极坐标方程式

下面，我们来看看圆的极坐标方程式。

以极点 O 为圆心，定长 p 为半径的圆的极坐标方程式为 $r=p$ 即为所求。

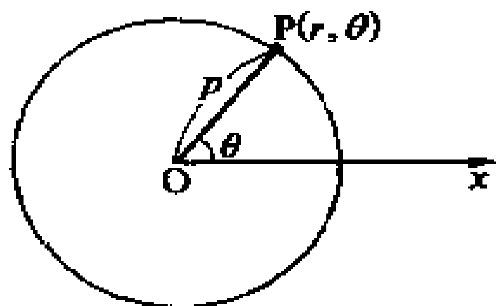


图 8-8

这实在是一个简明扼要的公式。

当然，p 为半径，所以 $p>0$，为正值。

如果 $p=0$，则是一个点，而且还是个虚圆点(imaginary circular point)。

如果 $p<0$，则是一个虚圆(imaginary circle)，所以，在表示实圆的时候，最好谨慎些，记作 $r=|p|$。

那末，圆心不是极点 O 的情况又该如何呢？

这时，圆心(c,α)，半径 $p(p>0)$圆的极坐标方程可表示为

$$r^2-2cr\cos(\theta-\alpha)+c^2-p^2=0 \qquad (*1)$$

但是，圆周上动点 P 的坐标为 $P(r,\theta)$，如图 8－9 所示。

我们知道，圆心 $C(a,b)$，半径 p 圆的直角坐标方程式为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=p^2 \qquad (*2)$$

如果比较(＊2)与(＊1)式，极坐标式(＊1)就显得很烦琐。这不像圆心为极点 O 那样，可以简单地表示为 $r=p$。

为了将极坐标式 $r=p$ 改写为直角坐标式，应怎样做呢？下面让我们来试试看。

由直角坐标和极坐标的关系（$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$）可知，圆心为原点(O)，半径 $r=p$ 圆的直角坐标方程式可推导如下。

因 $\qquad x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

故 $\qquad x^2=r^2\cos^2\theta,y^2=r^2\sin^2\theta$

所以 $\qquad x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

也就是说 $\qquad x^2+y^2=r^2$

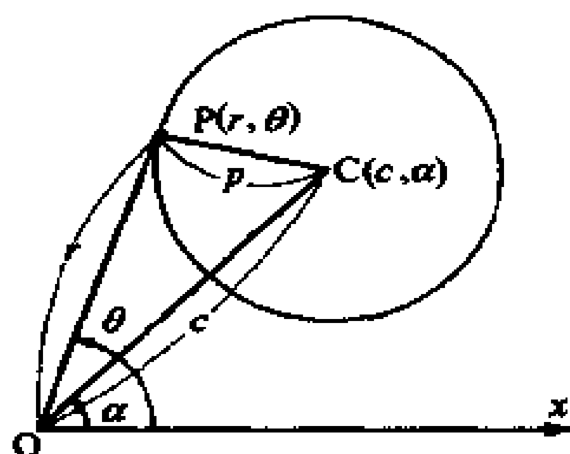


图 8－9

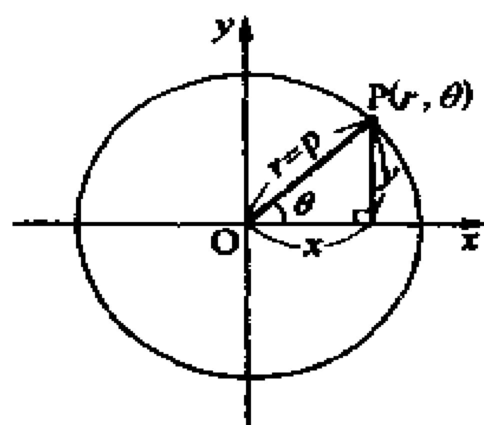


图 8－10

可是，$r=p$，因此有

$x^2+y^2=p^2$，即为所求。

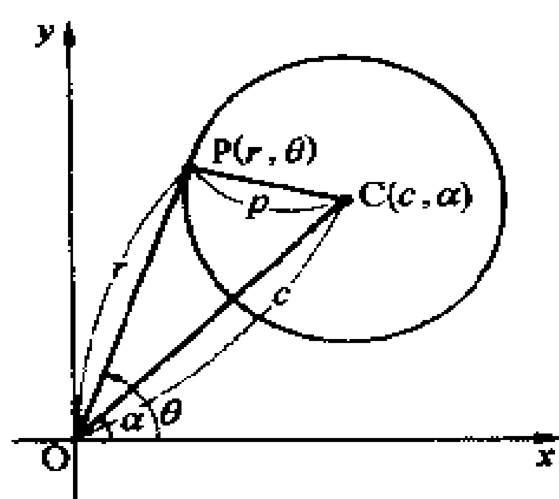


图 8－11

现在，让我们进一步来看看圆心(c,α)，半径为p圆的极坐标方程(＊1)$r^2-2cr\cos(\theta-\alpha)+c^2-p^2=0$。

在图 8－11 中，如果将极坐标改写为直角坐标，$C(c,\alpha)$则为$C(a,b)$，$P(r,\theta)$则为$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$。

因此，P，C 两点间的距离$\overline{PC}=p$

$$\overline{PC}=p=\sqrt{(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta-b)^2}$$

所以$(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta-b)^2=p^2$

将$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$代入上式后，则

$$(x-a)^2+(y-b)^2=p^2$$

此式为圆心(a,b)，半径p圆的直角坐标方程式。

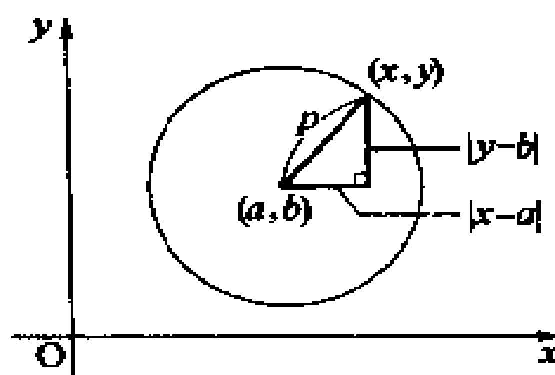


图 8－12

下面让我们简单说明圆心(c,α)，半径p圆的极坐标方程式(＊1)是怎样推导出来的。

如图 8－13 中所示，三角函数的余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$也适用于图 8－14 中的△POC。

在图 8－14 的△POC 中，采用三角函数的余弦定理

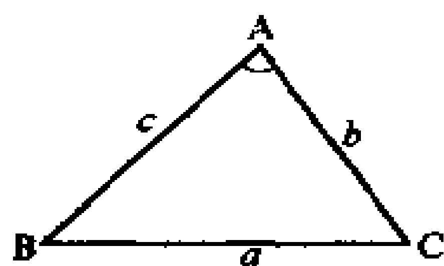


图 8－13

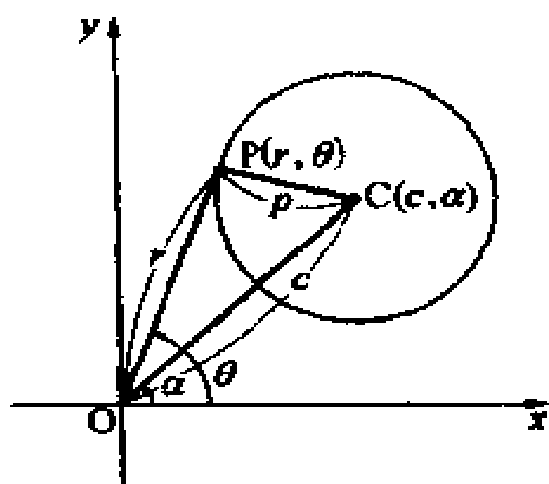


图 8－14

$$\overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OP}\cdot\overline{OC}\cos(\theta - \alpha)$$

据此，

$$r^2 + c^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) = p^2$$

所以

$$r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2 - p^2 = 0 \qquad (*1)$$

由此可见，证明（＊1）式成立的关键是所学定理和公式的恰当应用。

§8:5 抛物线、双曲线、椭圆的极坐标方程式

首先，讨论抛物线极坐标方程式。

如图 8－15 所示，距定点 F(p,0)和定直线 $x = -p$ 等距离的动点 P(r,θ)的移动轨迹，称为抛物线。

定点 F(p,0)叫做焦点，不通过焦点的定直线 $x = -p$ 叫做准线。

取焦点 F(p,0)为极点，在 x 轴正方向取 $x > p$ 的部分为始线。

这样，极点 F(p,0)处垂直于始线的直线 $x = p$ 与抛物线相交于 L 点，若 FL 线长度为 $l(l>0)$，则抛物线的极坐标方程式可表示为

$$r = \frac{l}{1-\cos\theta} \quad (l > 0)$$

下面，比较抛物线的极坐标和直角坐标方程式。

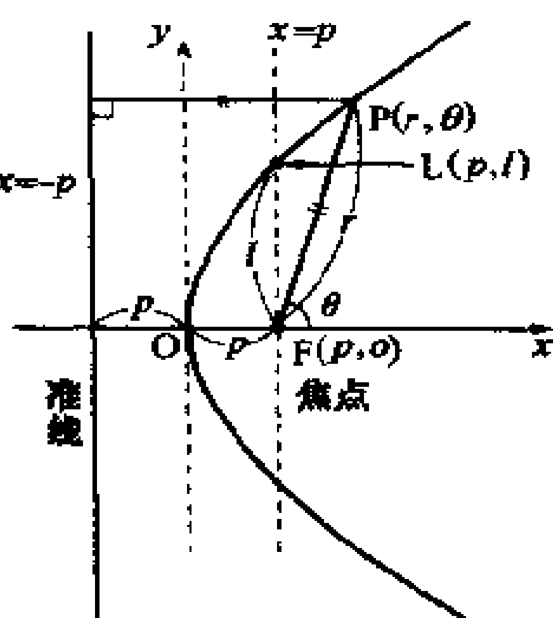


图 8－15

在直角坐标系中，焦点为 F(p,0)的抛物线方程式为

$$y^2 = 4px \tag{1}$$

由图 8－15 可知，

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta + p \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

而且点 L 的坐标为 L(p, l)，将 $x = p$ 代入(1)式，则得 $y^2 = 4p^2$，所以 $y^2 = (2p)^2$，故 $y = \pm 2p$。

但是，已知 $p>0$，$y = 2p$，

所以

$$l = 2p \tag{3}$$

将(2)、(3)式代入(1)式，则

$$(r\sin\theta)^2 = 2l\left(r\cos\theta + \frac{l}{2}\right)$$

展开整理

$$r^2\sin^2\theta = 2lr\cos\theta + l^2$$

使用三角函数公式 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

故

$$r^2(1-\cos^2\theta)=2lr\cos\theta+l^2$$
$$r^2\cos^2\theta+2lr\cos\theta+l^2=r^2$$
$$(r\cos\theta+l)^2=r^2$$

因此,

$$r\cos\theta+l=\pm r$$

可是,$r\geqslant 0, r\cos\theta+l>0$

所以 $r\cos\theta+l=r$

据此,$r(1-\cos\theta)=l$,

故
$$r=\frac{l}{1-\cos\theta}$$

也可以不用直角坐标,直接由抛物线定义来求其极坐标方程式。

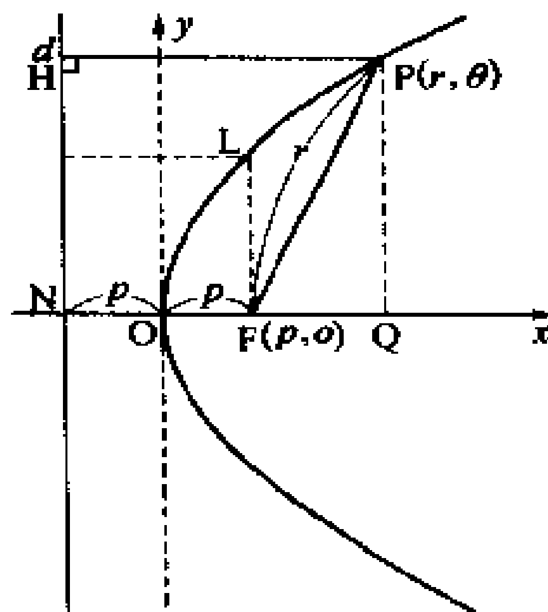


图 8－16

如图 8－16 所示,由抛物线上任一点 P(r,θ)向准线 d 及始线(x 轴)作垂线,其交点分别为 H、Q 点,而当 x 轴与准线的交点为 N 时,

则

$$PF=PH=NQ$$
$$=NF+FQ$$

所以 $r=2p+r\cos\theta$

因此,$r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$

在极点 F(p,0)处,垂直于始线的直线与抛物线的交点为 L,若 $FL=l$,因 $l=FN=2p$

故 $r=\dfrac{l}{1-\cos\theta}(l>0)$

下面，讨论双曲线的极坐标方程式。

距两个定点（焦点）的距离差相等的动点移动轨迹，定义为双曲线。

在图 8－17 中，令焦点$(ae,0)$为极点，x 轴的正方向$(>ae)$为始线。

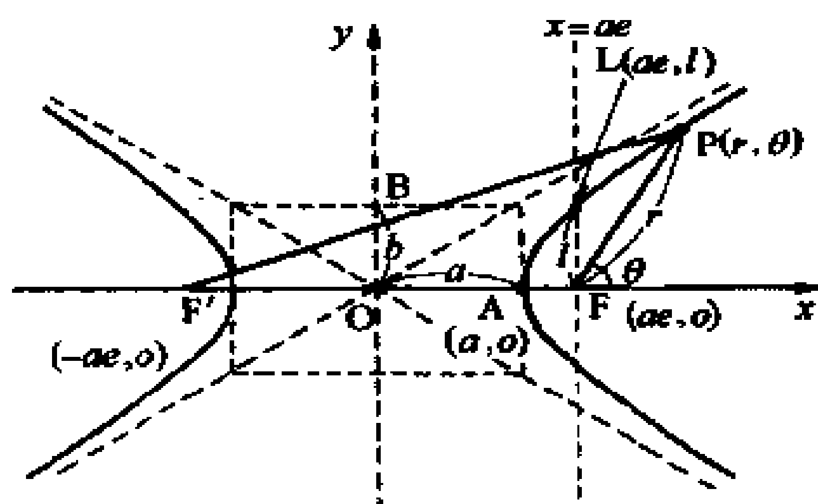


图 8－17

双曲线上任一点 $P(r,\theta)$，在极点 F 处与始线垂直，也就是说，$x=ae$ 线与双曲线相交于 L 点。若 $FL=l(l>0)$，则双曲线的极坐标方程可表示为

$$x=\frac{l}{1-e\cos\theta}\quad(e>1,l>0)$$

值得一提的是，式中，e 为离心率，大家绝不可与自然对数 e 的底数混淆。

在直角坐标系中，双曲线表示为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 时，

$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=e$，故 $e>1$。

最后，讨论椭圆的极坐标方程式。

距两个定点(焦点)距离之和恒定的动点(p,θ)移动轨迹，称为椭圆。

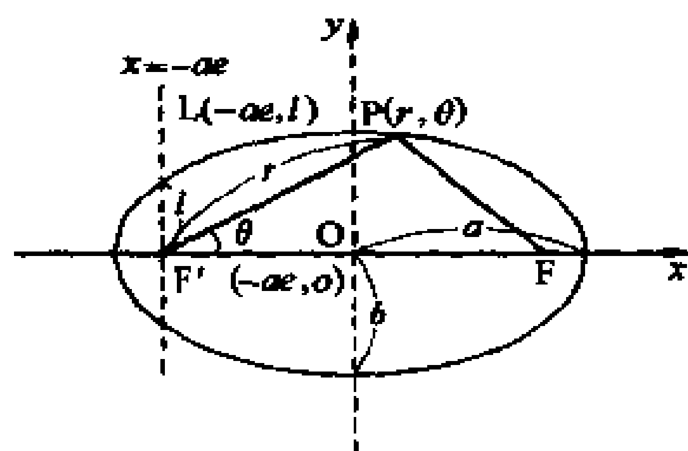


图 8－18

如图 8－18 所示，一焦点 $F(-ae,0)$ 为极点，x 轴正方向($>-ae$)为始线。

椭圆上任一点 $P(r,\theta)$ 在极点 F' 处与始线正交，也就是说，$x=-ae$ 线与椭圆的交点为 L。若 $FL=l(l>0)$ 时，则椭圆方程式可表示为

$$r=\frac{l}{1-e\cos\theta}\quad(0<e<1, l>0)$$

此式与双曲线极坐标式相同，但它们的离心率值并不一样。

直角坐标系中，椭圆方程式为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e$，且$0<e<1$。

在图 8－18 中，因 $a>b>0$，所以是长椭圆(横长椭圆)。

至此，可将以上所讲内容归纳为一个式子：

$$r=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

当 $0<e<1$ 时，为椭圆极坐标方程式；

当 $e=1$ 时，为抛物线极坐标方程式；

当 $e>1$ 时，为双曲线极坐标方程式。

式中，e 为离心率，l 为 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时的 r 值，而 $2l$ 则称为通径。

与自然对数的底(e)不同，离心率 e 取自它的英文字头 eccentricity，至于由何人首先启用这个符号，至今无从查考。

以上所讲的抛物线、双曲线、椭圆等极坐标方程式只是简单概述，但根据极点和始线的不同变化，其形状多种多样。有关这些极坐标方程式，请看专门读物。

§8.6 向　　量

向量这个词原本是数学用语，但目前既使在平时谈话中也经常会遇到。具有方向和大小的量叫做向量。也就是说，向量是有方向的线段。

除 $\overrightarrow{AB}$，$\vec{v}$ 之外，表示向量的方法还有 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等。

两个以上的向量，当它们的方向平行且绝对值大小相等，则称为相等的向量。换句话说，向量 $\overrightarrow{OP}$ 平行移动的向量完全相等，而且可有无数多个相等向量。

也就是说，图 8－19 中的 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{v}$ 两个向量相等，并可表示为 $\overrightarrow{OP}=\vec{v}$。

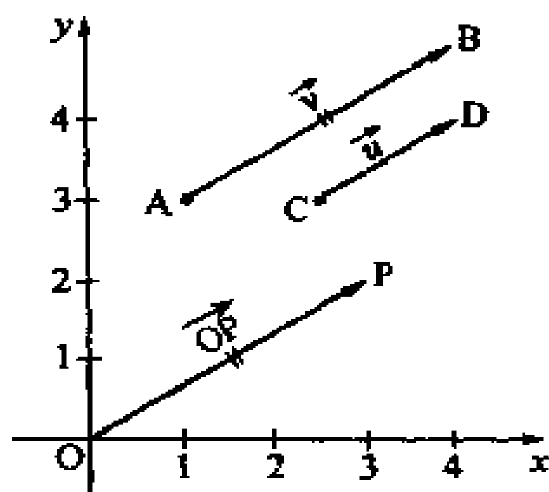


图 8－19

大小相等，方向相反

的向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$，可表示为$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。

向量的大小，可用其绝对值表示，如$|\vec{v}|$，$|\overrightarrow{AB}|$等等。

如果两个向量$|\vec{v}|=2|\vec{u}|$，且同向平行，即$\vec{v}//\vec{u}$，则表示为$\vec{v}=2\vec{u}$，而且$\vec{v}$为$\vec{u}$的2倍。

因此，向量可以有实数倍向量。

相对于向量而言，只有大小而不具备方向的量，则称为标量。

长度、面积、体积、重量、时间等全都是标量。除此之外，还应该有其他标量。

下面，介绍向量加法运算，即向量相加。

在图8－20中，$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$。

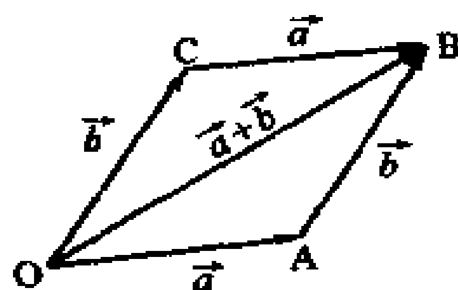


图8－20

这是开始学习力学时所见到的力的合成图。

也就是说，$\vec{a}$和$\vec{b}$两个分力的合力为$\vec{a}+\vec{b}$。

这里，$\overrightarrow{OA}$也可表示为$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}$。此时，A、B、C、O四点为平行四边形的4个顶点。

对向量而言，也有与实数相同的以下规律。

(1) 交换律(commutative law)

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

(2) 结合律(associative law)

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$$

(3) 分配律(distributive law)

$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$$

$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$$

这里所使用的 m,n 为实数。

大小为 1 的向量用$\vec{e}$表示，并称其为单位向量。

使用单位向量后，向量$\vec{a}$则表示为$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e}$。

向量表示为$\overrightarrow{AB}$时，点 A 称为始点，点 B 称为终点。

可是，O 为始点，点(1, 0)为终点的向量示为$\vec{e}_1$，而点(0, 1)为终点的向量示为$\vec{e}_2$时，则$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$叫做基本向量。

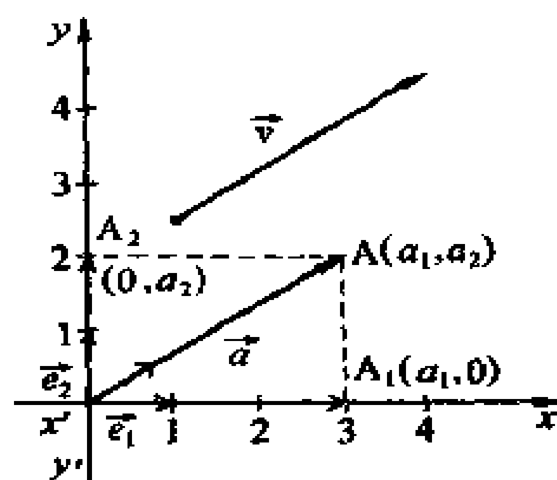


图 8－21

因此，$|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$。可是，$\vec{e}_1+\vec{e}_2\neq\vec{e}$，也就是说，$\vec{e}_1+\vec{e}_2=\sqrt{2}\vec{e}$。

在图 8－21 中，$\vec{v}\,/\!/\,\overrightarrow{OA}$，$|\vec{v}|=|\overrightarrow{OA}|$，所以 A 的坐标为(a_1,a_2)，而$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$。

因为，$\overrightarrow{OA_1}=|\overrightarrow{OA_1}|\vec{e}_1$，$\overrightarrow{OA_2}=|\overrightarrow{OA_2}|\vec{e}_2$，所以，$\overrightarrow{OA}$可表示为$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=|\overrightarrow{OA_1}|\vec{e}_1+|\overrightarrow{OA_2}|\vec{e}_2$。

进一步，令$|\overrightarrow{OA_1}|=a_1$，$|\overrightarrow{OA_2}|=a_2$后，则$\vec{v}$可表示为

$$\vec{v}=\overrightarrow{OA}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$$

因此，$\vec{v}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$的两个实数组$(a_1,a_2)$，就可用来表示向量$\vec{v}$。

这样，表示向量$\overrightarrow{OA}$的实数组(a_1, a_2)，称为向量成分。

此时，实数 a_1, a_2 称为向量$\vec{v}=\overrightarrow{OA}$的向量成分，而 a_1, a_2 分别称为 x 方向的成分和 y 方向的成分。

综合归纳以上所述，坐标平面上的所有向量，以原点为始点平移后，一一对应于 2 个实数构成的向量成分(a_1, a_2)组。

因此，向量也可表示为$\vec{v}_1=(a_1, a_2)$，$\vec{v}_2=(b_1, b_2)$等等。

采用这种方法表示向量之后，当$\vec{v}_1=(a_1, a_2)$，$\vec{v}_2=(b_1, b_2)$时，则向量加法记为

$$\begin{aligned}\vec{v}_1+\vec{v}_2&=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)\\&=(a_1+b_1, a_2+b_2)\end{aligned}$$

所以，向量加法与复数加法的计算相同。

同理，也可用来计算向量减法。

$$\begin{aligned}\vec{v}_1-\vec{v}_2&=(a_1, a_2)-(b_1, b_2)\\&=(a_1-b_1, a_2-b_2)\end{aligned}$$

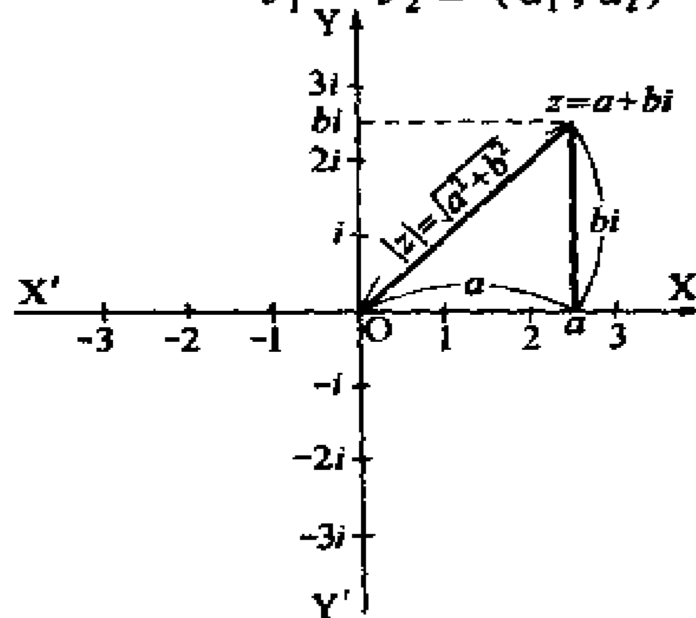


图 8－22

但是，利用向量成分计算向量乘法、除法时，就不像加法、减法的向量计算那么简单了。有关这类乘法、除法的运算，有待高中数学再做介绍。

最后，说说复数

与2个实数(x,y)组的关系。

复数可表示为$z=a+bi$，但在高斯平面上是一个点。

因此，$z=(a,b)$是将复数z表示为一组实数a，b，即若用(a,b)表示复数，则所表示的复数z点与2个实数(a,b)组一一对应。

这里，也以$z=a+bi=(a,b)$来表示复数，并用(a,b)表示复数z。

§8.7 向量的复数四则运算

令$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，首先来做加法计算。

因为
$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$$
$$=(a+c)+(b+d)i$$

另外，若$z_1=(a,b)$，$z_2=(c,d)$，则
$$z_1+z_2=(a,b)+(c,d)$$
$$=(a+c,b+d)$$

所以$(a+c)+(b+d)i=(a+c,b+d)$

这样，复数加法运算成立。

同理，也可进行复数减法运算。
$$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)$$
$$=(a-c)+(b-d)i$$

另外，
$$z_1-z_2=(a,b)-(c,d)$$
$$=(a-c,b-d)$$

所以$(a-c)+(b-d)i=(a-c,b-d)$成立。

对复数乘法而言，则
$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

另外，$z_1z_2 = (a,b)(c,d)$

$$= (a+bi)(c+di)$$

$$= (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$= (ac-bd, ad+bc)$$

所以$(ac-bd)+(ad+bc)i=(ac-bd, ad+bc)$成立[*]。

最后，是复数除法运算。当 $z_2 \neq 0$ 时

$$z_1 \div z_2 = (a,b) \div (c,d) = \frac{a+bi}{c+di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

这样，乘法、除法也使用(a,b)来代替 z，因此可以表示四则运算的结果。

如图 8-23 所示，$z=(a,b)$的共轭复数$\overline{z}=\overline{(a,b)}=(a,-b)$。

另外，$-z=-(a,b)=(-a,-b)$的共轭复数为

$$\overline{(-z)} = \overline{-(a,b)} = \overline{(-a,-b)} = (-a,b)$$

这里，计算 2 个互为共轭复数的 z，$\overline{z}$的和 $z+\overline{z}$。

$$z+\overline{z} = (a,b)+(a,-b)$$

$$= (2a,0) = 2a+0i = 2a$$

其和为实数 $2a$。

---

[*] 原书漏排文字。——译者注

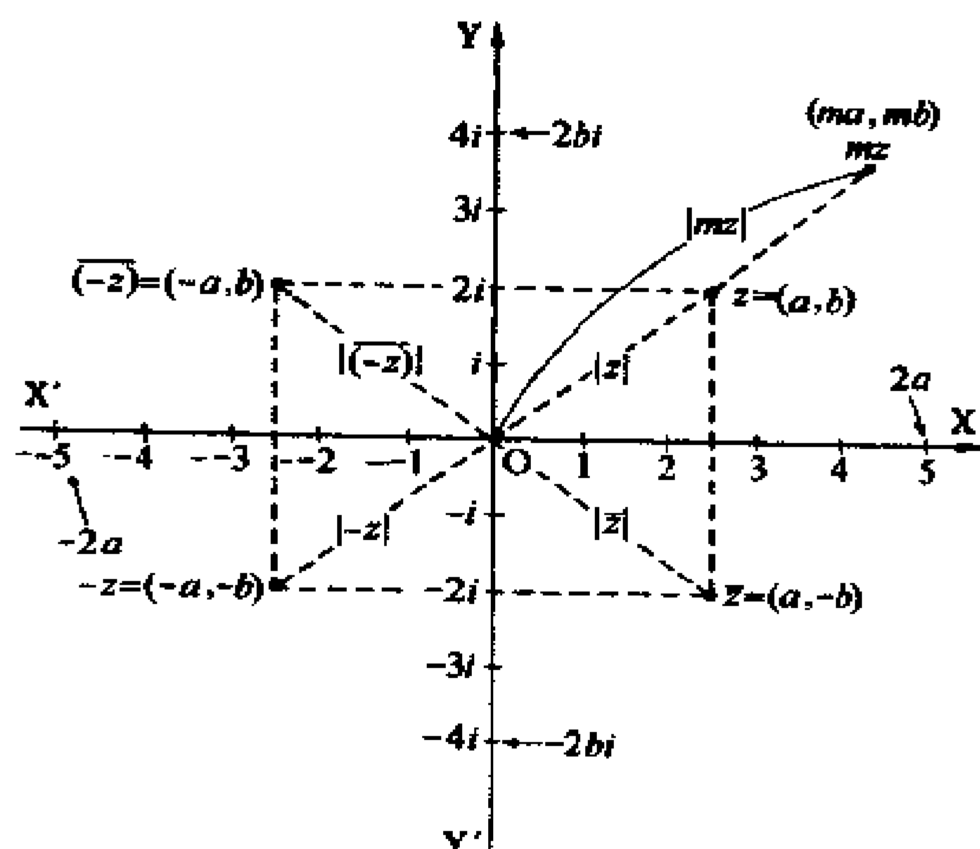


图 8－23

进一步，计算 $z+(\overline{-z})$。

$$
\begin{aligned}
z+(\overline{-z}) &= (a,b)+(\overline{-a,-b}) \\
&= (a,b)+(-a,b) \\
&= (0,2b)=0+2bi=2bi
\end{aligned}
$$

其和为纯虚数 $2bi$。

接着，

$$
\begin{aligned}
-z+(\overline{-z}) &= -(a,b)+(\overline{-a,-b}) \\
&= (-a,-b)+(-a,b) \\
&= (-2a,0)=-2a+0i=-2a
\end{aligned}
$$

$-2a$ 是实数。

最后，

$$
\begin{aligned}
\bar{z}-z &= (a,-b)-(a,b) \\
&= (a-a,-b-b)
\end{aligned}
$$

$$= (0, -2b) = 0 - 2bi = -2bi$$

这里的 $-2bi$ 为纯虚数。

进一步，对实数 m, n 而言，下式成立。

$$mz = m(a, b) = (ma, mb)$$

这与 $m(a + bi) = ma + mbi$ 相同。

综上所述，现归纳整理直角坐标、极坐标、向量以及复数如下。

在笛卡儿坐标平面上的任一点 P，与 2 个实数组构成的 (x, y) 一一对应，并表示为 $P(x, y)$。

在极坐标中，P 点与 2 个实数组构成的 (r, θ) 一一对应，并表示为 $P(r, \theta)$。

向量在坐标平面以原点 O 为极点可平移，并且向量 $\vec{v}$ 以其在 x 轴成分 v_x 及 y 轴成分 v_y 2 个实数组 (v_x, v_y) 与表示 $\vec{v}$ 的点一一对应，并可以记为 $\vec{v} = (v_x, v_y)$。

最后，在高斯平面（复数平面）上，复数 $z = a + bi$ 表示一个点，并与两个实数组成的 (a, b) 一一对应，从而也可表示为 $z = (a, b)$。

因此，平面坐标、极坐标、向量、复数全能用 2 个实数 R_1, R_2 构成的 (R_1, R_2) 组来表示。

这里，R 为英文实数(real number)一词的大写字头。

可是，复数 $z = a + bi$ 作为 2 个实数所构成的 (a, b) 组，最初定义将其表示为 $z = a + bi = (a, b)$ 的人是德国数学家高斯。

这是在 1831 年，至今已有 160 多年了。

总而言之，采用实数 (R_1, R_2) 组可论述数学领域中的所有平面坐标、极坐标、向量和复数。

因此，(R_1, R_2) 实数组称为二元数。

相对于复数 $a+bi$ 而言，尚有称为3元数的 $a+bi+cj$ 形的数。这些数与空间点的位置一一对应。

进一步，还考虑过4元数、5元数…n 元数等等，但它们的实用价值不大，除了在特殊领域之外，一般不常用这些数。

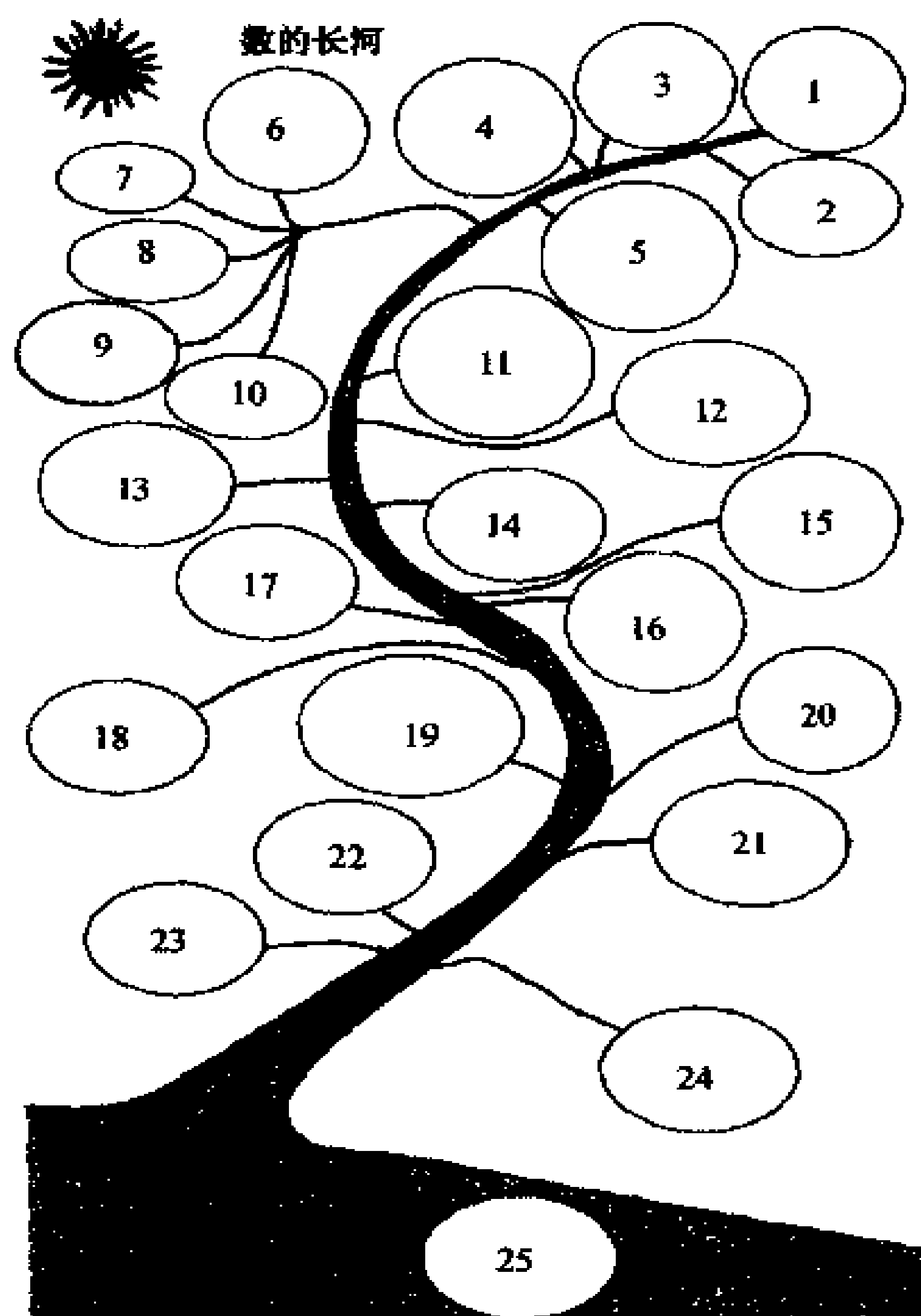


图8-24 历代数的分支示意图

图 8-24 的附表

编号	年　代	相关成果摘要
1	原始时代	一一对应，只有 1 和很多
2	公元前 3000 年左右	玛雅数字 · ·· ··· ···· —
3	公元前 2000 年左右	印加帝国的绳扣记数
4	公元前 2000 年左右	埃及开始丈量土地
5	阿基米德公元前 287 ~212 年	$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$
6		巴比伦数字 v vv vvv vvv/v vvv/vv vvv/vvv
7		中国汉代数字一二三四五六
8		希腊数字 I II III IIII Γ ΓI ΓII
9		古埃及数字
10		罗马数字 I II III IV V VI VII VIII
11		印度的数学家印度阿拉伯数字发现二次方程式的解法及 0
12	1150 年前后	婆什迦罗提出的正、负数
13	塔尔塔利亚(1499 ~ 1557)	1535 年塔尔塔利亚发现三次方程式的解法
14	卡尔达诺(1501 ~ 1576)	1545 年卡尔达诺代数学书的出版
15	鲁道夫(1540 - 1610)	1596 年 π 的精确值已计算到小数点后 35 位
16	伽利略(1564 - 1642)	主张地动学说并受宗教裁判
17	笛卡儿(1596 ~ 1650)	笛卡儿直角坐标
18	费马(1601 ~ 1665)	费马大定理
19	帕斯卡(1623 ~ 1662)	帕斯卡的三角形(1654)、概率论
20	牛顿(1642 ~ 1727)	1669 年发现微积分
21	德·莫依尔(1667 ~ 1754)	德·莫依尔定理
22	欧拉(1707 ~ 1783)	e,i,π 等的命名
23	阿尔冈(1768 ~ 1822)	阿尔冈图解式
24	高斯(1777 ~ 1855)	高斯平面及电磁学方面的研究
25		近代数学、2 进制以及电脑、磁卡时代

结 束 语

作者学生时代，承蒙恩师筐部貞市郎、三上義夫、黑須康之介、矢野健太郎等诸位先生教导，在数学史方面所受到的教益一直铭记在心，并曾出版过几本书。由于已经过去了许多年，为确信本书内容正确无误，作者参看过以下所列参考书。

为此，对这些参考书作者及出版社，在此一并致谢。

对本书内容不够满足的读者，推荐大家进一步阅读更深入的读物。

本书执笔过程中，曾受到日本数学教育学会名誉会长、东京理科大学教授松尾吉知先生的指导，在电脑程序方面曾受到奈良女子大学西岡弘明先生的善意协助。

为此，再次向以上各位先生们致谢！谢谢大家。

堀場　芳数

1990年6月　于伊豆

参 考 文 献

『茶の間の数学』 笹部貞市郎／聖文社
『複素数』 黒須康之介／培風館
『複素数とベクトル』 勝浦捨造／旺文社
『代数学と幾何学』 矢野健太郎／裳華房
『電気用数学の学び方』 森本和三／東京電機大学出版局
『フランス革命と数学者たち』 田村三郎／講談社
『方程式に強くなる』 田村三部／講談社
『BASIC』 刀根薫／培風館
『大日本百科事典ジャポニカ』／小学館
『数学英和・和英辞典』 小松勇作編／共立出版
『ことわざ名言事典』／創元社
『岩波国語辞典』 西尾・岩淵編／岩波書店
『こどもカラー図鑑（さんすう）』 堀場芳一／講談社
『学習総合大百科事典（算数）』 堀場芳一／講談社
『円周率πの不思議』 堀場芳数／講談社